Corrigé non officiel de la partie mathématique de la deuxième épreuve d'admissibilité. groupement académique 2
CRPE session 2014 (14 juin 2013)

Exercice 1

1 Le tableau ci-dessous dans lequel les nombres figurant en abscisse et en ordonnées représentent les tirages de chaque dé, et les nombres situés à l'intérieur du tableau leur somme, permet d'observer que sur les 36 issues possibles, 18 sont paires et 18 sont impaires, **l'affirmation est donc vraie**.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Autre justification : pour chacun des dés, la probabilité de tirer une valeur paire est de 1/2
On obtient un résultat pair soit avec deux dés pairs, soit avec deux dés impairs.
La probabilité d'obtenir deux dés pairs est 1/2 x 1/2 soit 1/4
La probabilité d'obtenir deux dés impairs est également 1/4

La probabilité d'obtenir une somme paire est donc 1/2.

2 Un angle plat mesure 180°, l'angle $\widehat{EBA}$ mesure donc 60°. (*Remarque : ceci n'est vrai que si la partie gauche du trait tracé horizontalement sur le document est une partie de la droite (BC). L'alignement de B,C,D et E ne le garantit nullement, mais on le suppose…*).
La somme des trois angles d'un triangle est de 180°, l'angle de sommet A du triangle ABE mesure donc 180° - 60° - 25° soit 95°.
L'affirmation est fausse.

3 Ce robinet, supposé avoir un débit constant, remplit :
250 litres en 5 minutes,
500 litres en 10 minutes,
3 000 litres en 60 minutes. Or 3 000 litres correspondent à 3 m^3.
L'affirmation est vraie.

4 Un nombre entier qui ne s'écrit qu'avec des 9 est le produit par 9 d'un nombre entier qui ne s'écrit qu'avec des 1.

Il est possible de trouver un nombre entier ne s'écrivant qu'avec des 1 et qui est multiple de 9, il suffit que le nombre de ses chiffres (égal à la somme de ses chiffres puisque tous les chiffres sont égaux à 1) soit un multiple de 9.
Ainsi, les entiers s'écrivant avec neuf chiffres 1, 18 chiffres 1, 27 chiffres 1… sont multiples de 9. Leurs produits respectifs par 9 sont des entiers ne s'écrivant qu'avec des 9 et qui sont multiples de 81. Le premier d'entre eux est 999 999 999.
L'affirmation est vraie.

Exercice 2

1 Les 10 premiers termes de la suite de Syracuse dont le premier terme est 3 sont :
3 10 5 16 8 4 2 1 4 2

Les 10 premiers termes de la suite de Syracuse dont le premier terme est 5 sont :
5 16 8 4 2 1 4 2 1 4

Les 10 premiers termes de la suite de Syracuse dont le premier terme est 6 sont :
6 3 10 5 16 8 4 2 1 4

On peut formuler la conjecture que toutes les suites de Syracuse comportent le terme 1.
Beaucoup d'autres formulations sont acceptables, par exemple le fait que toutes les suites de Syracuse comportent le terme 4… ceci dit, il me semble gênant de formuler une conjecture sur aussi peu d'exemples, avec des nombres de départ aussi petits. Il est par ailleurs heureux qu'il ne soit pas demandé de démonstration car, à ma connaissance, aucun mathématicien n'est encore parvenu à démontrer la vérité ou la fausseté de cette conjecture.

2 a) La suite de Syracuse qui a comme premier terme 20 et celle qui a pour premier terme 3 out toutes deux comme second terme 10.

b) Soit n la valeur du deuxième terme d'une suite de Syracuse, et soit P sont premier terme.
Si P est pair, on a $n = P/2$, donc $P = 2n$.
Si P est impair, on a $n = 3P + 1$, donc $P=(n-1)/3$
Il n'y a donc, au maximum, que deux valeurs possibles pour le premier terme d'une suite de Syracuse dont on connait le deuxième terme (dans les cas où n-1 n'est pas divisible par 3, il n'y en a même qu'une seule).
On ne peut donc pas trouver trois suites de Syracuse différentes ayant le même deuxième terme.

3 Un nombre impair est de la forme $2k + 1$, où k est un entier.
Son successeur dans la suite de Syracuse est égal à $3(2k + 1) + 1$ soit $6k + 4$ ou encore $2(3k + 2)$, c'est donc un nombre pair.
Un nombre impair ne peut donc pas être suivi d'un nombre impair.

autre rédaction : si on multiplie un nombre impair par 3, on obtient un nombre impair. En ajoutant 1 à ce nombre, on obtient un nombre pair.

Exercice 3

1 Les triangles ODC et OEF sont rectangles en C et F.
Leurs hypoténuses [DO] et [OE] ont la même longueur, car ce sont des rayons du même cercle.
Leurs côtés de l'angle droit [DC] et [EF] ont la même longueur, car ce sont les côtés opposés d'un rectangle.
Il en résulte que les triangles rectangles ODC et OEF sont superposables, les côtés de l'angle droit non encore considérés, [OC] et [OF] ont donc la même longueur.

On pouvait aussi utiliser le théorème de Pythagore dans les deux mêmes triangles.
D'autres démonstrations sont possibles, mais plus délicates à rédiger, en voici un exemple :
Considérons la médiatrice de [DE]. C'est un axe de symétrie du rectangle CDEF, elle passe par les milieux des côtés [DE] et [CF]. Or O est sur la médiatrice de [DE] puisque OD = OE. O est donc l'intersection de la médiatrice de [DE] et de (CF), c'est donc le milieu de [CF].

2 Comme C appartient à [AO], la plus petite valeur possible de OC est 0 cm (quand C est confondu avec C), la plus grande valeur possible de OC est 5 cm (quand C est confondu avec A).

3 Dans le triangle CDO, rectangle en O, utilisons le théorème de Pythagore.

$OD^2 = OC^2 + CD^2$

$5^2 = 3^2 + CD^2$

$25 = 9 + CD^2$

$16 = CD^2$

$CD = 4$

On en déduit que les côtés du rectangle CDEF mesurent respectivement 6 cm et 4 cm.
Son périmètre est donc de 20 cm et son aire de 24 cm².

Le triangle rectangle de dimensions 3 4 5 est si classique qu'il peut être considéré comme connu, l'étape utilisant le théorème de Pythagore est alors superflue.

4 a) En reprenant le raisonnement du la question précédente en prenant x comme valeur de OC au lieu de 3, on obtient :

$OD^2 = OC^2 + CD^2$

$5^2 = x^2 + CD^2$

$25 - x^2 = CD^2$

$CD = \sqrt{25 - x^2}$

b) Dans le rectangle CDEF, le côté CF mesure $2x$ et le côté CD mesure $\sqrt{25 - x^2}$

Le périmètre du rectangle est donc égal à $2\left(2x + \sqrt{25 - x^2}\right)$ et son aire à $2x\sqrt{25 - x^2}$

c) Pour que le recangle CDEF soit un carré, il faut et il suffit que les côtés CF et CD aient la même longueur, on en déduit que :

$$2x = \sqrt{25 - x^2}$$
$$4x^2 = 25 - x^2$$
$$5x^2 = 25$$
$$x^2 = 5$$
$$x = \sqrt{5}$$

Il existe donc une seule valeur de x pour laquelle CDEF est un carré : $\sqrt{5}$

Les côtés du carré mesurent alors $2\sqrt{5}$.
Son périmètre est de $8\sqrt{5}\ cm$, son aire de $20\ cm^2$.

5 a) Quand x =0, C est confondu avec O, le rectangle est alors aplati et son aire est nulle, mais pas son périmètre, c'est donc la courbe C1 qui représente l'aire, et C2 qui représente le périmètre.

b) Cette affirmation est fausse, en effet, pour des valeurs de x proches de 4, les courbes montrent que quand x augmente, le périmètre augmente, mais l'aire diminue.

6 Le périmètre du rectangle est égal à $2\left(2x + \sqrt{25 - x^2}\right)$ et son aire à $2x\sqrt{25 - x^2}$

a) pour calculer le périmètre du rectangle, on peut entrer dans la cellule B2 la formule
=2*(2*A2+RACINE(25-A2*A2))

b) pour calculer l'aire du rectangle, on peut entrer dans la cellule B2 la formule
=2*A2*RACINE(25-A2*A2)

c) En utilisant le tableau et l'allure de la courbe, qui suggère que la valeur augmente jusqu'à un maximum, puis diminue, la valeur x1 pour laquelle le périmètre est maximum est comprise entre 4,4 et 4,6.