Corrigé non officiel de la partie mathématique de la deuxième épreuve d'admissibilité. groupement académique 3
CRPE session 2014 (14 juin 2013)

Exercice 1

1. L'affirmation 1 est vraie.

$4^7 \times 5^{18} = 2^{14} \times 5^{18} = 2^{14} \times 5^{14} \times 5^4 = 10^{14} \times 625$

L'écriture décimale de ce nombre s'obtient donc en écrivant 14 zéros à la droite de 625, elle comporte bien 17 chiffres.

2. L'affirmation 2 est fausse.

Supposons que l'affirmation soit vraie. Toutes les chaussettes étant rouges sauf deux, il y aurait 4 chaussettes rouges. De la même façon, il y aurait 4 chaussettes vertes, ce qui est incompatible avec un nombre total de 6 chaussettes.

On peut également chercher le nombre de chaussettes de chaque couleur pour conclure. On trouve alors qu'il y a une chaussette rouge une bleue et une verte si on fait l'hypothèse (non précisée dans l'énoncé) que seules ces couleurs sont présentes. Si on admet qu'il peut y avoir d'autres couleurs il existe une autre solution : deux chaussettes qui ne sont ni rouges ni vertes ni bleues.

3. L'affirmation 3 est fausse.

S'il y avait 4 billes noires dans le sac, la probabilité de tirer une bille noire serait de $\frac{4}{15}$ or

$\frac{4}{15} \neq 0,3125$ car $15 \times 0,3125 \neq 4$ *(il est inutile d'effectuer l'opération pour s'en assurer, le résultat comporte 4 chiffres après la virgule dont le dernier est un 5, il ne peut donc pas être égal à 4).*

Autre justification *: soit n le nombre de billes noires.*

la probabilité de tirer une bille noire est $\frac{n}{11+n}$ *, on a donc* $\frac{n}{11+n} = 0,3125$ *d'où , en multipliant par 16 les deux membres de l'équation :* $\frac{16n}{11+n} = 5$; $16n = 55 + 5n$; $11n = 55$; $n = 5$.

Il y a donc 5 billes noires et non 4.

4. L'affirmation 4 est fausse.

250 g d'un mélange à parts égales d'arabica et de robusta couterait 1,90€ (1€ pour l'arabica et 0,90€ pour le robusta).
Pour obtenir à partir de ce mélange à parts égales le mélange étudié, il faut remplacer une partie de l'arabica par du robusta, ce qui diminue le prix du mélange.

5. L'affirmation 5 est fausse.

A 13 h 30 min, l'automobiliste aura roulé pendant 1h 30 min et parcouru 145 km.
A 13 h 30 min, le cycliste aura roulé pendant 6 h 30 min et parcouru 97,5 km.
L'automobiliste aura ratrapé le cycliste avant 13 h 30 min.

De très nombreux autres raisonnements sont possibles, par exemple le suivant :
La vitesse de l'automobiliste est égale à 6 fois celle du cycliste. Au moment de la rencontre, le cycliste aura donc roulé 6 fois plus longtemps que l'automobiliste. Or, à 13 h 30 min l'automobiliste aura roulé 1,5 h et le cycliste 6,5 h ce qui n'est pas 6 fois plus.

6. L'affirmation 6 est vraie.
Considérons le quadrilatère SBTD.
Ses diagonales ont le même milieu et la même longueur car ce sont des diamètres de la sphère. De plus ils sont perpendiculaires, donc SBDT est un carré.
Les carrés ABCD et SBDT ont en commun la diagonale [BD] donc ils sont superposables.
Les arêtes [SB], [BT], [TD] et [DS] ont donc la même longueur que [AB], [BC], [CD] et [DA].
On démontre de la même façon que les quatre arêtes restantes ont également la même longueur en montrant que SATC est un carré.

Exercice 2

1. a) Les diviseurs de 28 sont 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 et 28 or 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56.
La somme des diviseurs de 28 est égale à 2 x 28, donc 28 est un nombre parfait.

b) Les diviseurs de 12 sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 et 12. La somme des diviseurs de 12 est égale à 28, ce qui est supérieur à 2 x 12, donc 12 est un nombre abondant.

2. Nous allons étudier systématiquement tous les entiers naturels non nuls dans l'ordre croissant, jusqu'à avoir trouvé un entier parfait, un abondant et un déficient.

nombre	diviseurs	somme des diviseurs	nature
1	1	1	déficient
2	1 ; 2	3	déficient
3	1 ; 3	4	déficient
4	1 ; 2 ; 4	7	déficient
5	1 ; 5	6	déficient
6	1 ; 2 ; 3 ; 6	12	parfait
7	1 ; 7	8	déficient
8	1 ; 2 ; 4 ; 8	15	déficient
9	1 ; 3 ; 9	13	déficient
10	1 ; 2 ; 5 ; 10	18	déficient
11	1 ; 11	12	déficient

On a montré à la question précédente que 12 est abondant, c'est donc le plus petit nombre abondant. 1 est le plus petit nombre déficient, et 6 le plus petit nombre parfait.

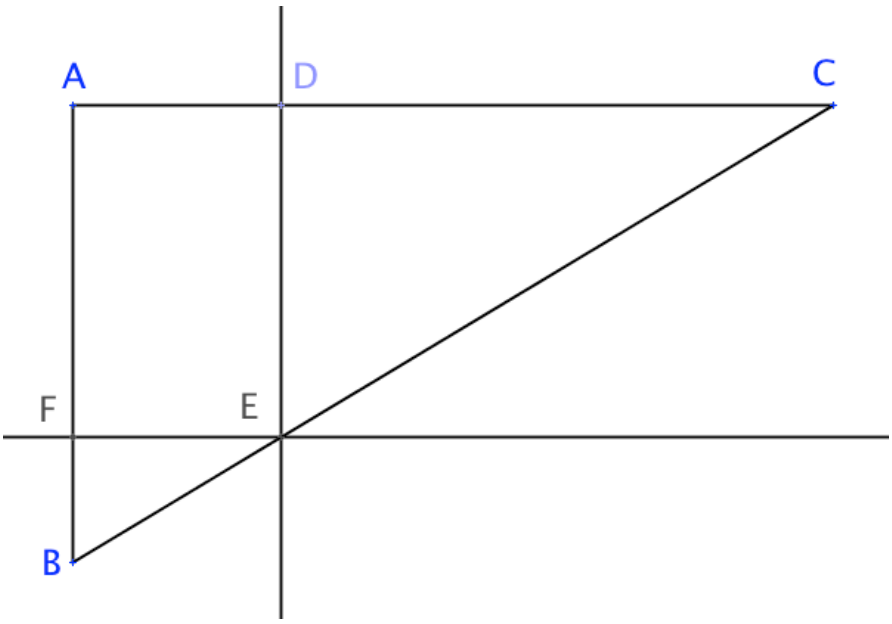
Remarque : en résolvant la question 3 avant la question 2, on racourcirait la rédaction de celle ci puisqu'il ne serait plus nécessaire d'envisager les nombres premiers, tous déficients.

3. Un nombre premier n a pour diviseurs 1 et n. La somme de ses diviseurs est n + 1 ce qui est inférieur à 2n puisqu'un nombre premier est supérieur à 1.
4. Les nombres premiers sont donc tous déficients.

Exercice 3

Partie I

1. *En l'absence de consignes sur les instruments autorisés pour la construction, on considère que l'équerre est autorisée, aucune trait de construction n'est donc nécessaire en plus de la figure demandée.*



2. La consigne «Déterminer la position du point D…» est ambigüe, s'agit-il de décrire une construction du point D permettant d'obtenir un carré, ou bien de déterminer une des longueurs AD ou CD ? Les deux approches permettent à notre avis de «Déterminer la position du point D…»

3.

Les donnée fournies permettent de démontrer facilement que ADEF est un rectangle. Pour que ce soit un carré il faut une propriété supplémentaire : on montre que la diagonale est une bissectrice dans une des approches, que deux côtés consécutifs sont égaux dans l'autre.

Approche géométrique

Pour que ADEF soit un carré, il faut et il suffit que [AE) soit la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

Le point D est alors obtenu ainsi :

Construire la bissectrice de $\widehat{BAC}$, nommer E son intersection avec (BC).

Construire la parallèle à (AB) passant par E, son intersection avec (AC) est le point D cherché, dont la position est ainsi entièrement déterminée.

Approche par le calcul de la longueur
Soit x la longueur AD correspondant au cas où ADEF est un carré. On utilise deux fois le théorème de Thalès d'une part dans la figure formée par les triangles BEF et BCA, d'autre part dans la figure formée par les triangles CDE et CAB, ce qui permet d'obtenir les égalités suivantes :

$\frac{BF}{BA}=\frac{BE}{BC}$ d'où $\frac{6-x}{6}=\frac{BE}{BC}$

$\frac{CD}{CA}=\frac{CE}{CB}$ d'où $\frac{10-x}{10}=\frac{CE}{CB}$

Or $\frac{BE}{CB}+\frac{CE}{CB}=\frac{BE+CE}{CB}=\frac{CB}{CB}=1$, il en résulte que :

$$\frac{6-x}{6}+\frac{10-x}{10}=1$$

$$\frac{30-5x}{30}+\frac{30-3x}{30}=1$$

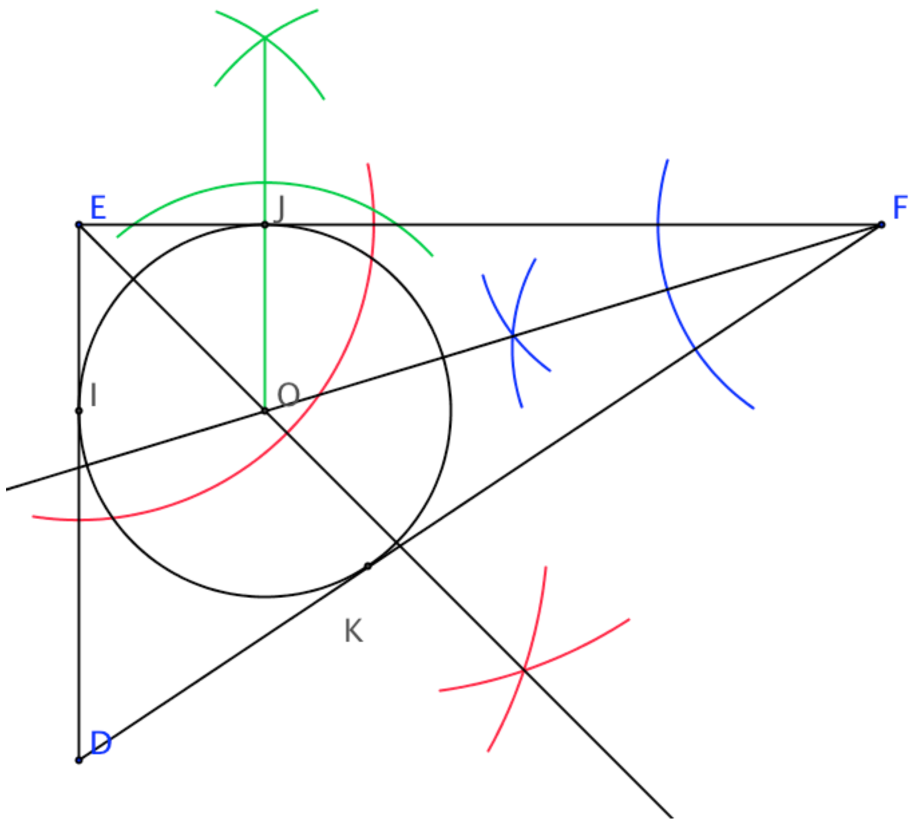
$$60-8x=30$$

$$8x=30$$

$$x=\frac{30}{8}=\frac{15}{4}$$

Pour que ADEF soit un carré, il faut donc que la mesure en cm de AD soit égale à $\frac{15}{4}cm$

Partie II



On a indiqué sur la figure (en vert) la construction du point J qui, de façon très étonnante, n'est pas demandée. Pour tracer le cercle C, il ne suffit pas en effet de déterminer son centre (intersection des bissectrice des angles du triangle), il faut en connaître un point. La construction repose sur le fait que le cercle est tangent aux côtés et que (OJ) est donc perpendiculaire à (EF). Les points I et K se construisent de la même façon, on n'a pas fait apparaître ces constructions pour ne pas surcharger la figure.

2. Le quadrilatère OJEI est un rectangle car il a trois angles droits *(on voit ici l'importance de la construction précise des points I et J)*. Par conséquent, EJ = OI = 2 cm, et EI = OJ = 2 cm.

Les triangles rectangles OID et OKD ont la même hypoténuse, et leurs côtés [OI] et [OK] ont la même longueur, il en résulte que ces triangles sont superposables et que DI = DK.

On démontre de la même façon que FJ = FK

notons p le périmètre du triangle DEF :

p = DE + EF + FD
p = DI + IE + FJ + JE + FD
p = IE + JE + DI + FJ + FD
p = 2 + 2 + DK + FK + FD
p = 4 + FD + FD = 4 + 13 + 13 = 30

Le périmètre du triangle DEF est de 30 cm.