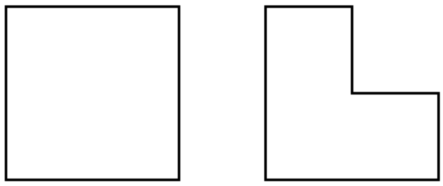
Corrigé de l'exemple de sujet pour l'écrit du nouveau CRPE (2014) proposé par Primaths.

PREMIERE PARTIE, PROBLÈME

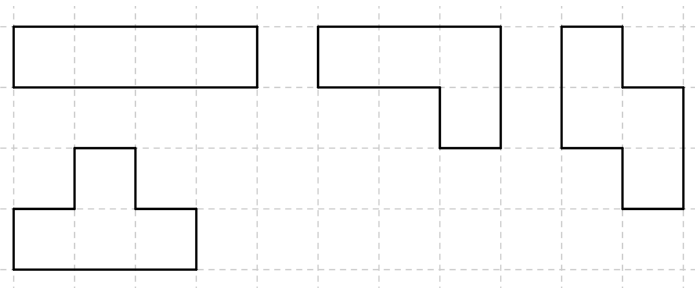
Partie A : choix des pièces.

1) La contrainte A assure bien qu'aucune pièce ne peut entrer dans une autre empreinte que la sienne. Supposons en effet qu'une pièce X entre dans une empreinte Y différente de X, son aire est alors plus petite ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle les aires de X et de Y sont égales.

La contrainte P n'assure pas qu'aucune pièce ne peut entrer dans une empreinte différente de la sienne. Par exemple, les deux figures ci-dessous ont le même périmètre, la figure de droite peut cependant occuper l'alvéole correspondant à la figure de gauche.



Il est possible de respecter simultanément les contraintes A et P, c'est le cas par exemple pour les quatre figures suivantes :

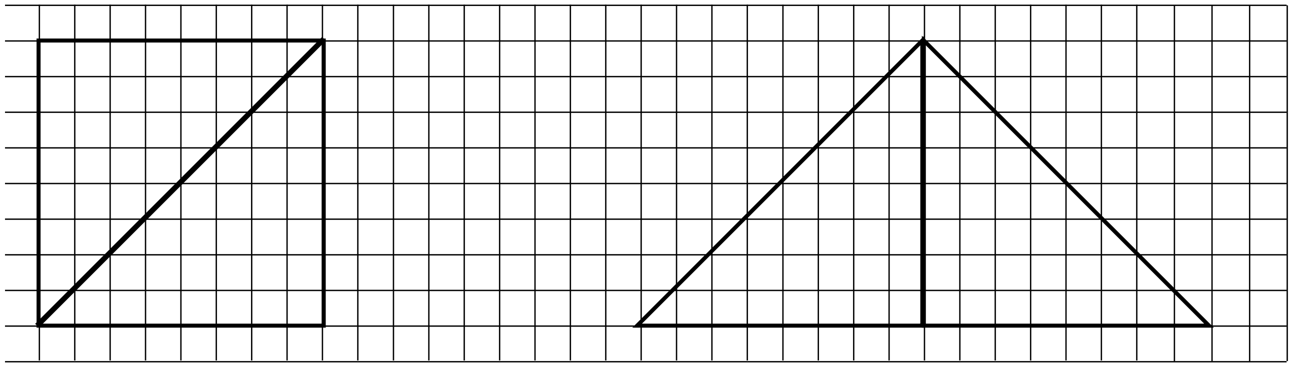


2) Lors du collage des pièces issues du carré, il faudra :

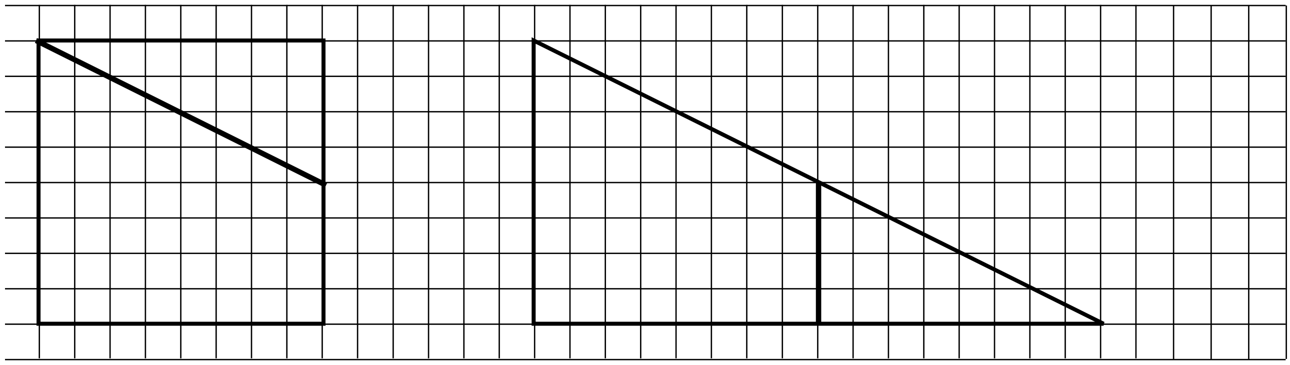
•Coller toutes les pièces obtenues par le découpage.
•Les coller sans superposition.

Par ailleurs, il faudra aussi que les morceaux se touchent pour obtenir une forme « d'un seul tenant ». Dans le cas contraire, l'aire totale des morceaux serait égale à celle du carré, mais la réalisation d'une pièce unique pour le jeu envisagé serait impossible.

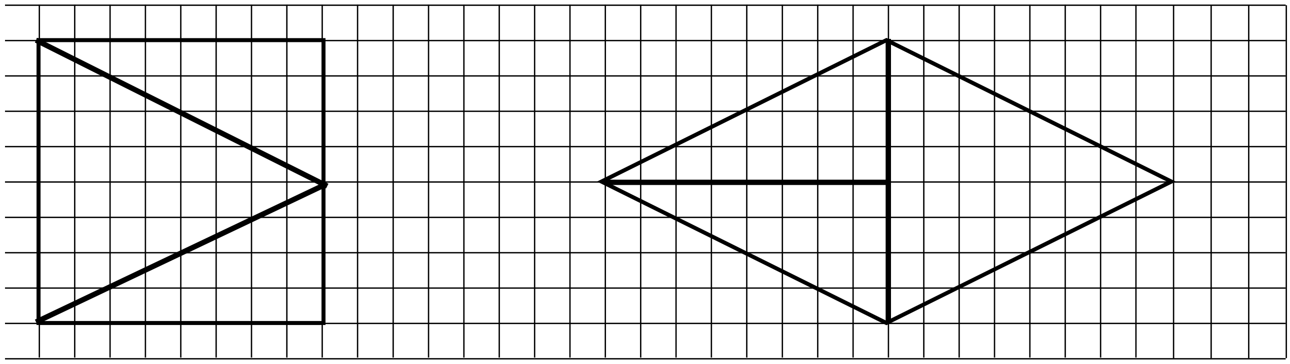
3)
un triangle rectangle isocèle



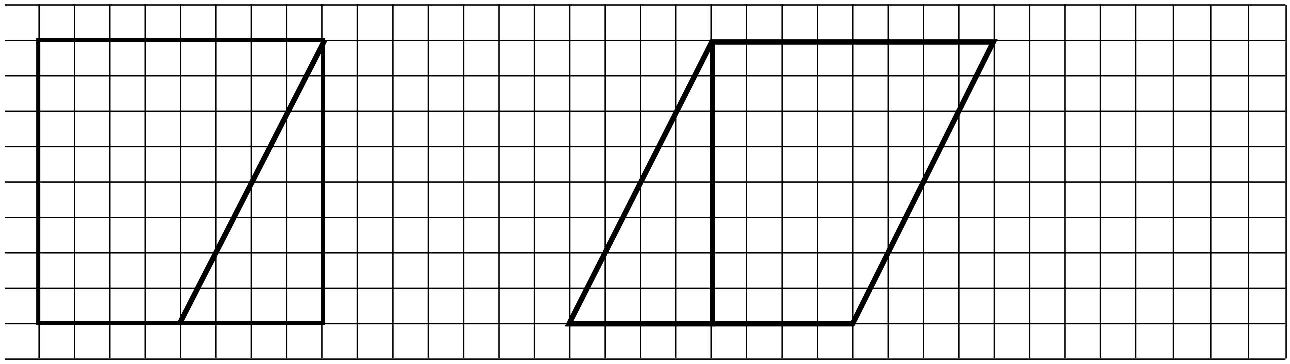
un triangle rectangle non isocèle



un losange non carré



un parallélogramme (ni rectangle ni losange)



On ne peut obtenir qu'un triangle isocèle rectangle, mais éventuellement par d'autres découpages. Pour toutes les autres figures, il existe d'autres solutions (nous pensons que celles proposées ici sont parmi les plus simples).

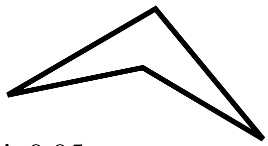
4) Le graphique représente la fonction qui au nombre x associe le nombre $y = \pi x^2$, on peut donc considérer qu'il représente l'aire du disque, exprimée en millimètres carrés, en fonction de son rayon, exprimé en millimètres.
Les côtés du carré mesurent 5 cm, c'est-à-dire 50 mm, son aire mesure donc 2500 mm^2.
On lit sur le graphique que le rayon du disque d'aire 2500 mm^2 mesure environ 28 mm.
Son diamètre mesure donc environ 56 mm.

Partie B : étude du jeu entre la pièce et son alvéole.

1) Notons a, b et c les mesures en degrés des angles du triangle.
Les angles des trois secteurs angulaires mesurent respectivement
360 - a - 90 - 90 , 360 - b - 90 - 90 et 360 - c - 90 - 90 soit 180 -a , 180 - b et 180 - c.

Leur somme est donc égale à 180 - a + 180 - b + 180 - c = 360 + 180 - (a+b+c).
Or la somme des angles d'un triangle mesure 180°, on a donc a+b+c = 180, la somme des angles des secteurs angulaires est donc égale à 360°. Comme ces secteurs ont tous un même rayon de 0,1 mm, ils peuvent donc être assemblés en un disque complet.

2) Le procédé n'est pas applicable à un quadrilatère concave, en effet les rectangles construits sur les côtés de l'angle rentrant se superposent.



3) La mesure de l'aire de chacun des rectangles, en cm^2, est égale à 5 x 0,01 soit 0,05.
La mesure de l'aire du disque constitué par les trois secteurs angulaires est π x $0{,}01^2$.
L'aire totale de la partie située entre la pièce et l'alvéole mesure donc
4 x 0,05 + π x 0,0001 soit environ 0,2003 cm^2.

Or l'aire du carré est de 25 cm^2. 1% de cette aire correspond donc à 0,25 cm^2.
L'aire de l'alvéole dépasse donc celle de la pièce de moins de 1%, l'affirmation est fausse.

DEUXIEME PARTIE

Exercice 1.

a) En une demi-heure, le cycliste parcourt 10 km.
Le cyclomotoriste roule 20 km/h plus vite que le cycliste, il lui faut donc une demi-heure pour rattraper les 10 km de retard.
La rencontre aura donc lieu une demi-heure après le départ du cyclomotoriste, c'est-à-dire à 10 heures.

b) La vitesse du second cycliste est égale à 24/20, soit 6/5 de celle du premier.
La durée du trajet étant inversement proportionnelle à la vitesse, la durée du trajet du second cycliste est donc égale à 5/6 de la durée du trajet du premier.
La différence entre les deux durées, qui est de 20 minutes, est donc 1/6 de la durée du trajet du premier cycliste.
Cette durée est donc de 6 fois 20 minutes, soit deux heures, la rencontre a donc lieu à 11 h 45.

Autre méthode *: soit t la durée en heures du trajet du premier cycliste, la longueur du trajet (entre le point de départ et la rencontre) est donc 20 t.*
Cette même longueur, calculée à partir de la vitesse et de la durée du trajet du second cycliste est égale à $24\left(t-\frac{1}{3}\right)$ *on a donc :*

$$24\left(t-\frac{1}{3}\right)=20t$$
$$24t-8=20t$$
$$4t=8$$
$$t=2$$

La durée du trajet du premier cycliste est donc égale à 2 heures, et la rencontre a lieu à 11 h 45.

Autre méthode *: en 20 minutes, soit un tiers d'heure, le premier cycliste aura parcouru* $\frac{20}{3}$ *km .*

Le second cycliste se rapproche du premier de 4 km en une heure, donc de 20 km en 5 heures (5 fois plus) et de $\frac{20}{3}$ *km en* $\frac{5}{3}$ *h (trois fois moins).*

La durée totale du trajet du premier cycliste est donc $\frac{5}{3}$*h* + $\frac{1}{3}$*h soit 2h.*

La rencontre a lieu à 11 h 45.

Exercice 2.

a) Un nombre qui a pour reste 6 dans la division euclidienne par 7 est de la forme 7n + 6, où n est un entier.
A1 = 7 x 20 + 6 = 146 est une valeur possible de A comprise entre 100 et 200.

b) Un nombre qui a pour reste 4 dans la division par 7 est de la forme 7n + 4, où n est un entier.
On peut choisir les valeurs suivantes : B1 = 7 x 100 + 4 = 704 et B2 = 7 x 400 + 4 = 2804

c) B1 - A1 = 704 - 146 = 558 B2 - A1 = 2804 - 146 = 2658

$$
\begin{array}{r|l}
558 & 7 \\ \cline{2-2}
\underline{-49} & 79 \\
68 & \\
\underline{-63} & \\
5 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
2658 & 7 \\ \cline{2-2}
\underline{-21} & 379 \\
55 & \\
\underline{-49} & \\
68 & \\
\underline{-63} & \\
5 &
\end{array}
$$

d) Les indications données sur les divisions euclidiennes permettent de dire que B = 7b + 4 et A = 7a + 6, a et b étant deux entier naturels.
On a alors B - A = 7b + 4 - (7a + 6) = 7 (b-a) - 2 = 7 (b-a-1) + 7 - 2 = 7 (b-a-1) + 5
or b-a-1 est un entier, donc le reste de la division euclidienne de B - A par 7 est égal à 5.

Exercice 3.

a) Selon le graphique, il a été recyclé en France environ 5100 millions de tonnes de papier en l'an 2 000. Comme on cherche seulement un ordre de grandeur, on considérera que cela correspond environ à 5400 millions de tonnes pour 400 jours.
On trouve la quantité de papier recyclé en 400 jours pour un habitant en divisant 5 400 millions de tonnes par 60 millions, on obtient 90 tonnes.
90 tonnes en 400 jours correspondent à 900 kg en 4 jours, soit plus de 200 kg par jour et par personne.

b) Le cadre en haut à droite affirme que 1 million de tonnes c'est comme 100 camions de 10 000 kg, or 100 camions de 10 000 kg correspondent à 1 million de kg. Le manuel commet donc une erreur d'un facteur 1 000. C'est probablement la même erreur qui se retrouve dans le graphique.
Si on considère qu'il a été recyclé environ 5 100 millions de kilogrammes (et non de tonnes) de papier en l'an 2 000 en France, on obtient un ordre de grandeur de 200 g par personne et par jour, ce qui est nettement plus vraisemblable.

c) La différence vient probablement du fait que les distances fournies et attendues ne sont pas les distances entre les différents points au sens mathématique (c'est à dire en ligne droite) ni au sens de la vie courante (c'est à dire la plus courte distance en utilisant les routes). Il s'agit des distances parcourues par les coureurs, dont l'itinéraire n'est généralement pas le plus court possible.

d) L'énoncé suivant serait exempt des contradictions relevées dans l'énoncé original :
Lors de la 9^{e} étape du Tour de France 2011, les cyclistes ont parcouru 208 km d'Issoire à Saint-Flour en passant par le col de Serre. Entre Issoire et le col de Serre, les coureurs ont parcouru 128 km. Quelle distance ont-ils parcourue du col de Serre à Saint-Flour ?

TROISIEME PARTIE

Partie A

a) Le maître a fait deux choix : d'une part les bords de la rivière ne sont pas parallèles aux bords de la feuille, d'autre part la droite qui relie la maison à la réserve de carottes n'est pas perpendiculaire à la rivière. Ces deux choix sont pertinents. En effet, la meilleure disposition des pierres consiste à les placer sur une perpendiculaire aux bords de la feuille, ce qui serait probablement obtenu dans de nombreux cas sans pour autant que les élèves aient perçu l'importance de cette disposition particulière si le maître avait fait les choix contraires.

b) Le fait de fournir des cubes a plusieurs avantages :
•Cela libère les élèves de la difficulté du tracé des carrés, ils sont ainsi plus disponibles pour réfléchir à la meilleure disposition possible.
•Cela impose la taille des carrés (si cette taille n'était pas imposée, les enfants pourraient dessiner de grands carrés qui remplissent pratiquement la rivière et rendent caduque la question de la disposition).
•Surtout, le fait de disposer de quatre petits cubes permet d'avoir une vue d'ensemble de la situation : les élèves peuvent déplacer leurs cubes jusqu'à obtenir une disposition d'ensemble qui leur convient et ne tracer qu'ensuite. En l'absence de cubes, ils seraient obligés de dessiner un premier carré en imaginant seulement la position des suivants, ce qui serait beaucoup plus difficile.
Rappel : trois avantages sont donnés ici, mais deux seulement étaient demandés.

c) On peut retenir les critères de réussite suivants :

1. Les pierres sont disposées approximativement en ligne droite.
2. Cette ligne droite est approximativement perpendiculaire à la rivière.
3. Les pierres des extrémités sont distantes des bords de la rivière.
4. Les intervalles entre les pierres sont approximativement de même longueur (ainsi que les intervalles entre les pierres extrêmes et les bords de la rivière le cas échéant).

On ne considérera pas le respect du nombre de pierres ou le tracé correct de petits carrés comme des critères de réussite, car ces éléments sont largement pris en charge par le maître à travers la fourniture de quatre petits cubes.

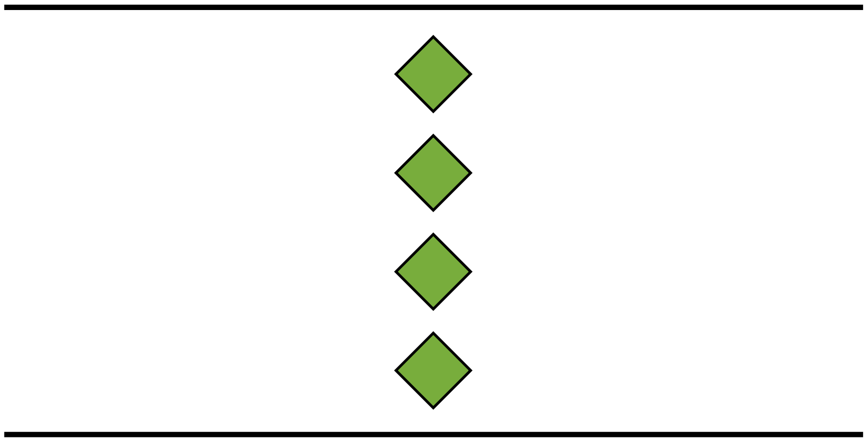
d) La production de Cécile répond aux critères 1 et 4.

La production de Anne répond aux quatre critères.

La production de Jean répond aux critères 3 et en partie aux critères 2 et 4.
Jean semble avoir placé ses cubes sur la droite reliant M à C, mais de façon un peu imprécise. On peut penser que Jean a essayé de réaliser des intervalles entre les pierres égaux. Il n'est pas certain qu'il ait cherché à ce que les espaces entre les pierres extrêmes et les rives soient égaux aux espaces entre les pierres.

La production de Kévin satisfait le critère 3 et partiellement le critère 4. Les intervalles entre les pierres sont à peu près égaux, mais nettement plus grands que les intervalles entre les pierres extrêmes et les rives.

e) La disposition approximative suivante permet d'obtenir des intervalles inférieurs à 1 m.



Partie B

a) Première procédure :
Calculer la longueur totale des objets et des intervalles déjà connus : c'est 4 fois 2,50 m plus deux fois 5 m, c'est-à-dire 20 mètres.
Calculer la longueur totale des intervalles égaux à déterminer : c'est la différence entre la longueur totale de la palissade (65 m) et la somme des longueurs connues, calculée précédemment (20 m).
Cette longueur totale est donc de 45 m.
Constater sur le schéma que les intervalles dont on cherche la longueur sont au nombre de 3.
Calculer la longueur d'un des intervalles en divisant par 3 la longueur précédemment trouvée : on obtient une longueur de 15 m pour chaque intervalle.

Deuxième procédure : par essais successifs.
On choisit une valeur arbitraire, mais vraisemblable pour un des intervalles, par exemple 10 mètres.
On calcule ensuite la longueur totale en faisant la somme de tous les éléments.
5 + 2,5 + 10 + 2,5 + 10 + 2,5 + 10 + 2,5 + 5 = 50.
La longueur totale étant inférieure à celle fournie dans l'énoncé, on recommence en prenant une longueur plus grande pour un des intervalles, par exemple 12 mètres ou 20 mètres.
On recommence ainsi en corrigeant en fonction des résultats obtenus jusqu'à envisager une longueur de 15 m pour un des intervalles. On constate alors que cette longueur est correcte puisqu'elle conduit à une longueur totale de 65 m.

b)
L'élève A calcule correctement la somme de toutes les longueurs connues (les bancs et les espaces des extrémités). Il fait ensuite une hypothèse sur la longueur d'un des intervalles cherchés et la teste. La longueur totale trouvée étant 60 m et non 65 comme attendu, il corrige en ajoutant 5 m à la longueur de 10 m testée précédemment, mais ne teste pas la nouvelle valeur (15 m) ainsi obtenue.

Cet élève commet les erreurs suivantes :
Il compte quatre intervalles identiques alors qu'il n'y en a que trois. Cette erreur est probablement due à deux facteurs : il semble que dans un premier temps il ait compté seulement trois intervalles (on voit une somme de 50 raturée pour donner 60 et un des 10 est écrit plus petit et semble avoir été ajouté après coup). Sa procédure d'ajout des 15 m manquants (déterminés correctement même s'il écrit 65 + 50 au lieu de 65 - 50 ce qui relève probablement de l'étourderie) conduit à un intervalle de 25 m entre deux bancs. Il se peut que l'élève ait jugé ce résultat trop grand ce qui l'aurait poussé

à rectifier. Par ailleurs, 4 étant le nombre de bancs, il peut y avoir eu confusion avec le nombre d'intervalles lors de la rectification.
Lorsque cet élève constate que la longueur totale qu'il obtient en essayant une valeur pour l'intervalle est trop petite, il ajoute ce qui manque à chaque intervalle (il ajoute 15 m quand il trouve une longueur totale de 50 m, et 5 m quand il trouve une longueur totale de 60 m). Cette façon de rectifier est erronée, il faudrait ajouter un tiers de ce qui manque à chaque intervalle.

Ainsi, la réponse correcte résulte de deux erreurs successives.

L'élève B utilise exactement la première procédure décrite dans la question a) mais avec plusieurs erreurs de calcul.
Il multiplie 2,50 par 4 comme s'il s'agissait d'effectuer deux multiplications d'entiers juxtaposées de part et d'autre de la virgule. Il effectue selon le même principe la division de 47,200 par 3 et se trompe également dans la soustraction 65 - 18,200.
On remarque que cet élève ne fait aucune erreur de calcul sur les entiers, c'est donc essentiellement la compréhension des nombres décimaux qui lui fait défaut.