IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.
Préparation au CRPE
Epreuve blanche de mathématique du 10 décembre 2005 – **CORRIGE** –

Première partie : questions mathématiques

Exercice 1

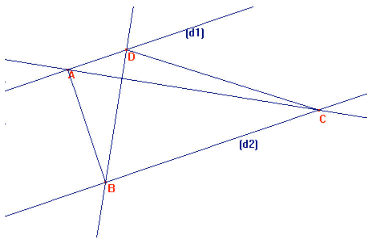
1) On a sélectionné les deux propriétés suivantes :

Deux angles droits (seulement)	et	Diagonales perpendiculaires

Sachant que, dans un quadrilatère qui a la première propriété, les angles droits sont soit opposés, soit consécutifs, donner un programme de construction pour une figure solution de chacun des deux types.

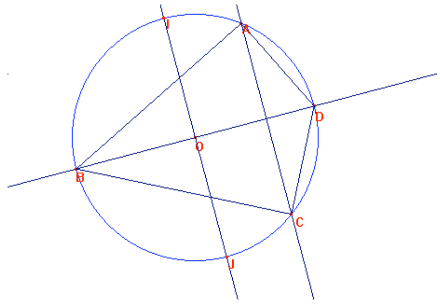
- Diagonales perpendiculaires et deux angles droits seulement consécutifs

Tracer un segment [AB].
Tracer les perpendiculaires (d_1) et (d_2) à (AB) passant respectivement par A et B.
Placer sur (d_2) un point C tel que BC $\neq$ AB.
Tracer la droite (AC) puis la perpendiculaire à (AC) passant par B.
Nommer D son point d'intersection avec (d_1).
Le quadrilatère ABCD ainsi obtenu répond à la question.



- Diagonales perpendiculaires et deux angles droits seulement opposés

Tracer un cercle C de centre O et de diamètre [BD].
Tracer la perpendiculaire à (BC) passant par O : elle coupe C en I et en J.
Placer sur C un point A distinct de B, de D, de I et de J.
Tracer la perpendiculaire à (BD) passant par le point A : elle coupe C en A et C.
Le quadrilatère ABCD ainsi obtenu répond à la question.



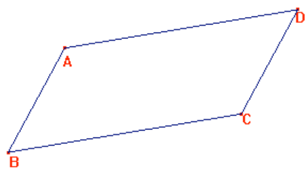
2) Les étiquettes incompatibles avec

Deux côtés parallèles (seulement)

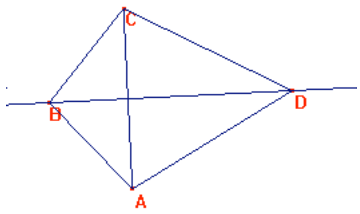
sont les suivantes (les justifications n'étaient pas demandées dans l'épreuve) :

Côtés de même longueur deux à deux

Deux cas sont possibles :
1er cas : les côtés de même longueur deux à deux sont les côtés opposés.
Si le quadrilatère est convexe, alors il s'agit d'un parallélogramme (et les côtés opposés sont parallèles deux à deux).



2ème cas : les côtés de même longueur sont deux paires de côtés consécutifs.
Les triangles DAC et BAC sont ici des triangles isocèles de sommets principaux respectifs D et B.
La médiatrice de [AC] est un axe de symétrie pour la figure et si deux côtés opposés sont parallèles, par exemples [AB] et [CD], alors les deux autres côtés sont aussi parallèles par symétrie (un couple de droites parallèles a pour image un couple de droites parallèles, par une symétrie axiale).



Quatre côtés de même longueur

En effet, il s'agit alors d'un losange, donc d'un quadrilatère dont les côtés sont parallèles deux à deux.

Quatre angles droits

En effet, il s'agit alors d'un rectangle, donc d'un quadrilatère dont les côtés sont parallèles deux à deux.

Côtés parallèles deux à deux

Sans commentaires…

Diagonales se coupant en leur milieu

En effet, il s'agit alors d'un parallélogramme, donc d'un quadrilatère dont les côtés sont parallèles deux à deux.

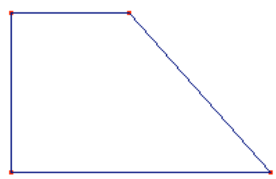
<u>Remarque (informations non demandées dans l'épreuve) :</u>

Les étiquettes compatibles avec

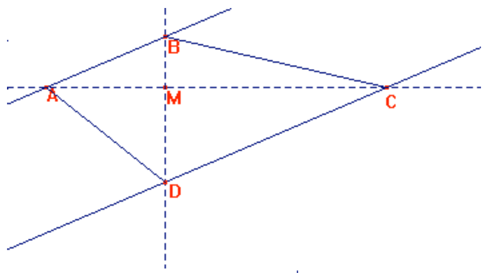
Deux côtés parallèles (seulement)

sont les suivantes :

Deux angles droits (seulement)



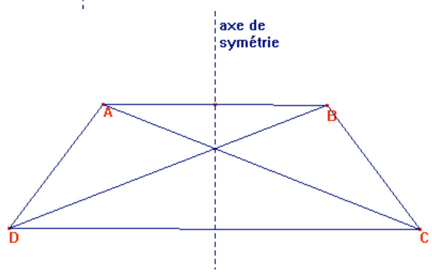
Diagonales perpendiculaires



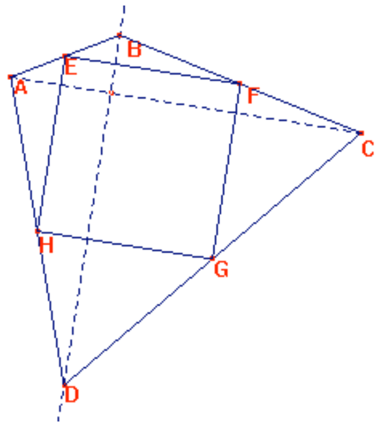
Deux côtés de même longueur (seulement)

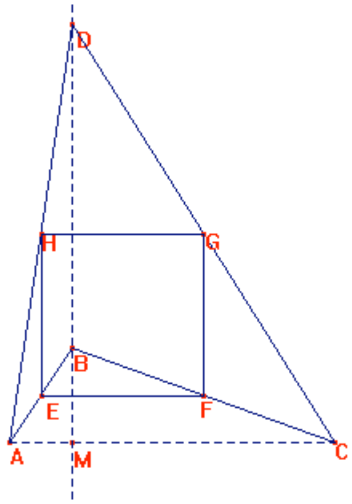
La même figure convient pour :

Diagonales de même longueur



3)





Première proposition de rédaction.

On sait que, dans le triangle ABC, les points E et F sont les milieux respectifs de [AB] et [BC].
Or si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle, alors elle est parallèle au troisième côté et la longueur du segment qui joint les milieux des deux côtés est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.

Donc (EF) // (AC) et EF = $\frac{1}{2}$ AC

Le même raisonnement dans les triangles ADC, BCD et BAD conduit à :

(GH) // (AC) et GH = $\frac{1}{2}$ AC

(FG) // (BD) et FG = $\frac{1}{2}$ BD

(EH) // (BD) et EH = $\frac{1}{2}$ BD

De plus on sait que les diagonales [AC] et [BD] du quadrilatère ABCD ont la même longueur.

Donc EF = FG = GH = HE (= $\frac{1}{2}$ AC = $\frac{1}{2}$ BD) et le quadrilatère EFGH est un losange.

Par ailleurs, on sait que les diagonales [AC] et [BD] du quadrilatère ABCD sont perpendiculaires, avec (EF) // (AC) et (FG) // (BD).

Donc (EF) $\perp$ (FG) et EFGH est un losange qui possède un angle droit :

<u>EFGH est un carré.</u>

Deuxième proposition de rédaction.

- Dans le triangle ABC, E et F sont les milieux respectifs de [AB] et [BC], donc (EF) // (AC) et EF = $\frac{1}{2}$ AC
- Le même raisonnement dans les triangles ADC, BCD et BAD conduit à :

(GH) // (AC) et GH = $\frac{1}{2}$ AC　　(FG) // (BD) et FG = $\frac{1}{2}$ BD　　(EH) // (BD) et EH = $\frac{1}{2}$ BD

- EF = $\frac{1}{2}$ AC ; GH = $\frac{1}{2}$ AC ; FG = $\frac{1}{2}$ BD ; EH = $\frac{1}{2}$ BD ; de plus AC = BD par hypothèse, donc EF = FG = GH = HE
- EF = FG = GH = HE, donc le quadrilatère EFGH est un losange.
- (EF) // (AC) et (BD) $\perp$ (AC) donc (BD) $\perp$ (EF)
- (FG) // (BD) et (BD) $\perp$ (EF) donc (EF) $\perp$ (FG)
- EFGH est un losange qui a un angle droit donc EFGH est un carré.

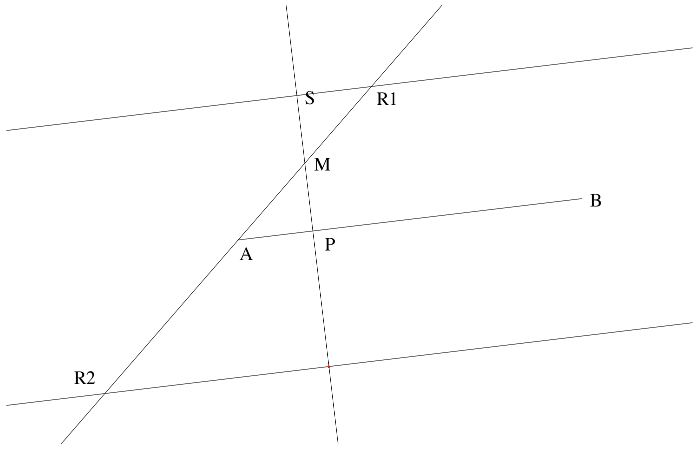
Les propriétés que possède le quadrilatère EFGH sont donc celles du carré :
Il a quatre angles droits, quatre côtés de même longueur, des côtés parallèles deux à deux, des diagonales de même longueur, perpendiculaires et se coupant en leur milieu.

Exercice 2

1) Les triangles ABM et ABS ont en commun le côté [AB].
Dans le triangle ABS, la mesure de la hauteur relative à [AB] est SP.
Dans le triangle ABM, la mesure de la hauteur relative à [AB] est MP.
M est le milieu de [SP], donc SP = 2 MP, par conséquent $\mathcal{A}$ (ABS) = 2 x $\mathcal{A}$ (ABM).
On obtient le quadrilatère AMBS en enlevant le triangle ABM du triangle ABS, on a donc :
$\mathcal{A}$ (AMBS) = $\mathcal{A}$ (ABS) - $\mathcal{A}$ (ABM) = 2 x $\mathcal{A}$ (ABM) - $\mathcal{A}$ (ABM) = $\mathcal{A}$ (ABM)
Le triangle ABM et le quadrilatère AMBS ont des aires égales.

2) Le périmètre de AMBS est égal à AM + MB + BS + SA
Le périmètre de ABS est égal à AM + MB + BP + PA
Dans le triangle rectangle APS, la longueur AS de l'hypoténuse est supérieure à la longueur AP d'un côté de l'angle droit. On a de même BS > BP.
On en déduit que le périmètre de AMBS est supérieur à celui de ABS.

3) Pour que ABS et ABR aient la même aire, il faut et il suffit que les hauteurs relatives au côté commun [AB] soient égales. La distance du point R à la droite (AB) doit donc être égale à PS.
R se situe donc sur une des deux droites parallèles à (AB) situées à la distance PS de (AB).
L'une de ces droites passe par S, l'autre par le symétrique de S par rapport à P.
Il y a donc deux positions possibles pour le point R : les intersections de (AM) avec ces deux parallèles.



Exercice 3

1) Traduisons l'énoncé en appelant a le nombre recherché, q le quotient et r le reste.
$a = 5q + r$, $0 \leq r < 5$, $a \neq 0$, $q = 2r$
Si $r = 0$ alors $q = 0$ et $a = 0$, solution non acceptable puisque l'énoncé précise $a \neq 0$.
Il ne reste donc plus que 4 valeurs pour r. On peut les réunir dans un tableau :

r	1	2	3	4
q	2	4	6	8
a	**11**	**22**	**33**	**44**

Il y a donc 4 solutions possibles au problème.

2) Soit N le nombre cherché :
N est multiple de 9
Le quotient euclidien de N dans la division par 19 est égal à 22 :
C'est à dire, $N = 19 \times 22 + r = 418 + r$ avec $0 \leq r < 19$
Autrement dit N est un multiple de 9 compris entre 418 et 436 inclus.

Le chiffre des centaines de N est donc 4. il suffit ensuite de trouver les multiples de 9 compris entre 418 et 436. Le premier est 423 (la somme de ses chiffres est divisible par 9), on compte ensuite de 9 en 9 : 432. Le nombre suivant sera trop grand.

Le problème admet deux solutions : 423 et 432.

3) *Résultat a* : L'ordre de grandeur du quotient ne correspond pas.
Le quotient est compris entre 1000 et 10000 (15 x 1000 < 36768 < 15x10000) donc ce n'est pas 254.
Résultat b : Le reste est trop grand.
Le reste doit être inférieur à 15, donc ce n'est pas 17.
Résultat c : Les chiffres des unités du quotient et du reste ne conviennent pas.
Considérons l'égalité de la division euclidienne :
Si cette division était juste, on aurait : 8, chiffre des unités du dividende égal à (5 x 0 + 3), chiffre des unités du produit du quotient par celui du diviseur ajouté au reste, ce qui n'est pas le cas ici.
Résultat d : Le reste ne peut pas être nul. Si le reste était nul, 36 768 serait multiple de 15, donc multiple de 5. Il devrait alors se terminer par un 0 ou un 5.

Deuxième partie : questions complémentaires portant sur la didactique.

Exercice 1

- Pierre évalue mal le premier chiffre de son quotient. Il ne se rend pas compte que son reste, 15, est trop grand. Il commet également une erreur dans le calcul du produit de 14 par 8 (il trouve 102 au lieu de 112) mais curieusement, la soustraction également fausse lui permet de trouver le reste correct.

- Cécile oublie le zéro en chiffre des dizaines. On peut formuler deux hypothèses : soit elle a abaissé les deux chiffres 1 et 8 en une seule fois, ou alors, elle a abaissé le 1 d'abord, s'est rendu compte que le nouveau dividende, 11, était trop petit et a abaissé le 8 sans tenir compte de cette nouvelle étape dans son quotient.

Remarque 1 : ces deux élèves gagneraient à évaluer l'ordre de grandeur de leurs résultats pour valider leurs opérations. En effet, ici les deux quotients sont clairement trop grand pour l'un et trop petit pour l'autre.
Remarque2 : A propos du quotient 0.
"- En 11 combien de fois 14 ?" La réponses spontanée chez certains enfants est : "C'est impossible".
"- Si je partage équitablement 11 objets entre 14 personnes, combien chacun recevra-t-il ?". La réponse est le plus souvent "- Rien". Il faut donc accepter psychologiquement que rien est quelque chose, ou du moins qu'il se note 0.
0 indique l'absence et il faut se convaincre de noter l'absence.

Exercice 2

1) Le maître peut avoir pour objectif que ses élèves apprennent à comparer des distances.
Un autre objectif possible est que ses élèves apprennent à résoudre un problème numérique par des procédures personnelles, ou encore qu'ils apprennent à déterminer la somme de petits nombres.

2) Du point de vue de la comparaison des longueurs, la règle choisie par le maître permet qu'il y ait beaucoup plus de comparaisons à faire, et augmente la probabilité de rencontrer des comparaisons pour lesquelles on ne peut pas conclure immédiatement en se basant uniquement sur la perception. Par exemple, dans la position de l'illustration fournie, il est immédiat de voir que A est le plus près, mais la comparaison des distances de B et C au petit est moins évidente.

Du point de vue numérique, la règle choisie donne l'occasion d'ajouter un nombre pouvant aller jusqu'à 4 à un autre nombre, alors que la règle alternative ne nécessite que de compter de 1en 1.

3) Déterminer la distance entre deux palets est difficile : faut il comparer la distance entre les centres, les distances les plus courtes possibles, autre chose ? Avec des boules, ces difficultés sont accrues car on ne se situe plus dans un plan mais dans l'espace. La plus courte distance entre le petit et la boule se mesure sur la droite joignant les deux centres, laquelle n'est pas parallèle au plan du sol.
D'un point de vue pratique, les palets permettent de tracer leur pourtour sur le sol, à la craie par exemple, pour comparer ensuite les distances sans craindre de déplacer les objets.
Les boules ne permettent pas cette procédure alors même qu'elles risquent d'avantage d'être déplacées en essayant de comparer les distances.

4) Avec des bandes de papier les élèves peuvent :

- Prendre une bande manifestement plus longue que les longueurs à comparer, placer une extrémité près du petit de telle sorte que la bande passe par dessus B, et couper au bord du palet B, faire la même chose pour le palet C avec une autre bande, puis comparer la longueur des deux bandes en les rapprochant.
- Faire comme précédemment avec la première bande, puis la placer entre le petit et C et constater qu'elle est trop courte.
- Placer l'extrémité d'une bande près du petit, et marquer au crayon le bord du palet B sans découper, placer ensuite la même extrémité près du petit et placer la bande sur C, conclure à l'aide de la position de la marque.

Avec des pièces de Lego, les élèves peuvent :

- Construire une barre qu'ils utilisent ensuite comme la bande de papier de la seconde procédure ci-dessus. La barre joint approximativement le petit à B, mais elle est trop courte pour joindre le petit à C, ce qui permet de conclure.
- Construire une barre qui va du petit à B et déterminer le nombre de pièces qu'elle contient.
  Construire une barre qui va du petit à C et déterminer le nombre de pièces qu'elle contient.
  Conclure en comparant les deux nombres, ce qui relève de la mesure, l'unité de longueur utilisée étant une dimension de la pièce de Lego

5) Les élèves peuvent dessiner autant de ronds sur un papier qu'ils marquent de points à chaque tour, puis compter le nombre total de ronds sur la feuille. Quand un joueur a 20 ronds ou plus, il a gagné..

Ils peuvent aussi à chaque tour déterminer le nouveau score en surcomptant. (pour trouver le résultat de 12 + 3 en surcomptant, on dit « 12…13,14,15 »). Ils écrivent alors le nouveau nombre en s'aidant éventuellement d'une bande numérique.

Ils peuvent préparer à l'avance une collection de 20 objets pour chaque joueur, qui en prend autant à chaque tour qu'il gagne de points. Le vainqueur est celui qui a pris en premier tous ses objets.

Ils peuvent mémoriser leur score total à l'aide d'un trombone placé sur la bande numérique, qui avance à chaque tour d'autant de cases que l'on marque de points.