IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.
Préparation au CRPE

Corrigé de l'épreuve blanche de mathématiques du 15 décembre 2007

Les parties en italique de ce corrigé sont des compléments qui ne sont pas attendus du candidat.
Par ailleurs, les rapports de jury du crpe rappellent régulièrement que quand le sujet demande « deux avantages », « trois procédures », le candidat est sanctionné s'il en fournit plus.
La présence d'un nombre plus grand de réponses dans ce corrigé n'est donc pas un modèle à suivre, elle a pour but de donner une idée de la variété des réponses possibles.

Exercice 1

1. Le quotient et le reste de la division euclidienne de n par 100 sont égaux, on a donc
$n = 100 q + q = 101 q$, q étant un entier inférieur à 100.
n est donc multiple de 101.

2. n est à la fois multiple de 101 et de 45.
Si on cherche à décomposer 101 et 45 en facteurs premiers, on constate que
$45 = 3^2 \times 5$ et que 101 est premier.
Le ppcm de 45 et 101 est donc égal à $3^2 \times 5 \times 101$, c'est à dire à 4545.
Les multiples communs à 101 et 45 sont donc les multiples de 4545.

Il y a deux multiples de 4545 qui s'écrivent avec quatre chiffres : 4545 et 9090.
$4545= 649 \times 7 + 2$ $\qquad$ $9090 = 1298 \times 7 + 4$

Seul le nombre 4545 répond donc à toutes les conditions.

Questions complémentaires à l'exercice 1

1. Cette comptine présente les avantages suivants :

- Cette comptine régulière correspond bien à l'écriture en chiffres des nombres dans le système décimal usuel. Quatre dix et deux explicite le sens de l'écriture « 42 » , ce que quarante deux ne fait que très partiellement (entendre « quatre » dans « quarante » n'est pas immédiat, de plus rien ne signale qu'il s'agit de quatre dizaines).
C'est encore plus vrai pour sept dix et trois.
Cette comptine aide donc probablement à la compréhension du système décimal.

- Cette comptine régulière permet de travailler rapidement avec des « grands » nombres (jusqu'à 99) puisqu'elle s'affranchit des irrégularités des noms de nombre de la langue française (de onze à seize, soixante-dix, quatre-vingts, quatre-vingt-dix).

- Elle permet de travailler facilement l'addition en calcul réfléchi avec des nombres de deux chiffres (trois dix et deux plus quatre dix et un, cela fait sept dix et trois est plus clair que trente-deux plus quarante et un égal soixante-treize).

- Elle est compréhensible facilement par toute personne parlant le français (la communication avec les parents est possible).

Voici une analyse plus détaillée du fonctionnement de cette comptine régulière :

- *La comptine exploite sans irrégularité la numération décimale : il suffit de connaître les onze* ***premiers mots-nombres*** *(en incluant le zéro ; les dix premiers sinon) et la logique du système décimal pour être de capable de construire la suite et de compter jusqu'à 99.*

- *Les régularités additive et multiplicative de la comptine, exploitée essentiellement à l'oral, renvoient à la* ***signification des chiffres des unités et des dizaines*** *des nombres dans l'écriture chiffrée : par exemple, trois dix et deux se traduit par 32, c'est-à-dire 3 dizaines et 2 unités ou encore 3 × 10 + 2.*
- *La comptine régulière correspond bien à l'idée des* ***groupements par 10 des unités*** *pour constituer un « dix » supplémentaire : pas de nouvelles appellations telles que « dizaine » ou « paquet de dix unités ». On retrouve ainsi les manipulations de base avec les cubes isolés des unités et les barres de dizaines.*
- *De cette comptine régulière sont exclus* ***les noms des nombres qui ne font pas référence à leur structure décimale*** *et qu'il faut apprendre pour eux-mêmes dans la comptine traditionnelle. Quelques exemples : onze, douze, quinze, vingt…*
- *Dans cette comptine n'apparaissent pas non plus les mots-nombres qui co-existent dans la comptine traditionnelle avec des* ***logiques internes diverses*** *(multiplicatives ou additives cependant). On dit, par exemple, vingt-**et**-un mais vingt-deux, on dit soixante-dix (60 + 10) au lieu de septante (7 × 10) ; par ailleurs quatre-vingts correspond à 4 paquets de 20 (!) et quatre-vingt-dix à 4 ×20 + 10…*

2. Point commun à tous les exercices : il s'agit de mettre en œuvre l'écriture décimale de nombres compris entre 30 et 60 après avoir analysé la quantité présentée en dizaines et unités. *Ce n'est pas tout à fait vrai pour l'exercice B, mais c'est toutefois probablement l'intention des auteurs du manuels.*

Le tableau suivant met en évidence les différences :
Une croix dans la colonne d'un exercice indique que la caractéristique est présente.

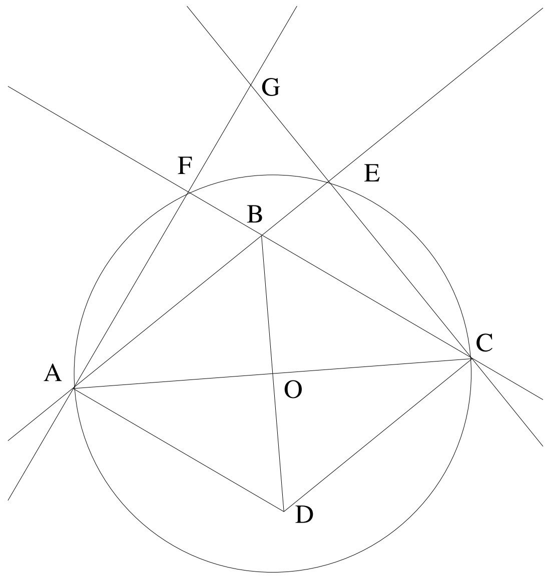
Caractéristiques	A	B	C	D
Les dizaines sont suggérées (boîtes de 10 craies, doigts de deux mains) et ne nécessitent donc pas de revenir au comptage de un en un.	x		x	
Il reste plus de 10 unités une fois prises en compte les dizaines suggérées, il faut donc prendre l'initiative de grouper 10 unités en une nouvelle dizaine.	x			
Il est proposé un cas ou le chiffre des unités est zéro.			x	
Le vocabulaire technique (dizaines, unités) est utilisé.				x
Il est explicitement demandé de faire des paquets de 10.		x		x
Il est demandé d'écrire le nombre de dizaines (ou de paquets de dix) et le nombre d'unités.		x		x
Les groupements par dizaines servent à écrire en chiffres le nombre total d'objets.	x		x	x
L'écriture d'une égalité est demandée en plus de celle du nombre.	x			
Les groupements par dizaines servent à comparer deux collections, l'écriture du nombre d'objets de chaque collection n'est pas demandée.		x		
Il n'est demandé de traiter qu'une seule collection.	x			x

Les exercices A et C sont de loin plus intéressants pour la compréhension du système décimal. Dans les exercices B et D le groupement par 10 est une tâche prescrite dont l'élève peut difficilement voir l'intérêt : puisque le comptage de un en un est nécessaire, l'élève ne peut pas constater que le groupement par 10 est une procédure plus économique.

Au contraire, dans les exercices A et C il est possible de répondre à la question soit en utilisant le principe du système décimal soit en revenant au comptage de un en un. Le maître peut faire remarquer lors de la correction que les deux procédures donnent le même résultat mais que l'une est plus économique.
L'idée centrale travaillée au CP concernant l'écriture des nombres est la suivante :
Si il y a 5 paquets de dix objets et 7 objets isolés, le nombre total d'objets s'écrit avec un 5 suivi d'un 7.
Cette idée n'est pas mise en évidence dans l'exercice B puisqu'on ne demande pas d'écrire le nombre total d'objet. Elle est masquée dans l'exercice D par l'utilisation de termes techniques dans une syntaxe déroutante. Qu'apporte l'emploi de « 6 unités de papillons » par rapport à « 6 papillons » ?

Exercice 2

Version 1



1. Le point E est sur le cercle de diamètre [AC] donc le triangle AEC est rectangle en E.
   Comme les points A,B et E sont alignés, on en déduit que (EC) $\perp$ (AB).
   ABCD est un losange, ses côtés opposés sont donc parallèles, on a donc (AB) // (CD).
   (AB) // (CD) et (EC) $\perp$ (AB) donc (EC) $\perp$ (CD).

2. ABCD est un losange, donc AB = BC. On en déduit que le triangle ABC est isocèle en B, et que les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BCA}$ sont égaux.
   Notons a la mesure commune à ces deux angles (en degrés).
   Le triangle AEC étant rectangle en E, on a $\widehat{ECA} = 90 - a$
   On démontre de la même façon, en utilisant le triangle ACF qui est rectangle en F, que $\widehat{FAC} = 90 - a$
   Dans le triangle GAC les angles de sommets A et C sont égaux, donc le triangle GAC est isocèle en G.

3. Soit O le milieu de [AC].
   Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu, donc (BD) est la médiatrice de [AC].
   GAC est isocèle en G, donc (GO), médiane issue de G, est aussi la médiatrice de [AC].
   Les droites (BD) et (GO) sont confondues, donc les points B, D et G sont alignés.

Version 2

1. E appartient au cercle de diamètre [AC] donc le triangle AEC est rectangle en E, donc (AE) $\perp$ (EC), ce qu'on peut aussi écrire (AB) $\perp$ (EC).
   ABCD est un losange, donc (DC) est parallèle à (AB).
   (DC) est parallèle à (AB) et (AB) est perpendiculaire à (EC) donc (DC) est perpendiculaire à (EC).

2. F appartient au cercle de diamètre [AC] donc le triangle AFC est rectangle en F, donc (CF) est perpendiculaire à (FA) , et donc à (GA) qui est confondue avec (FA).
   Dans le triangle GAC, (CF) passe par le sommet C et est perpendiculaire au côté (GA), c'est donc une hauteur. De même, (AE) est une hauteur.
   (AE) et (CF) sont deux hauteurs de GAC, donc leur intersection B en est l'orthocentre.
   (GB) passe par l'orthocentre B de GAB et par le sommet G, c'est donc une hauteur, donc (GB) est perpendiculaire à (AC).
   ABCD est un losange, donc (BD) est perpendiculaire à (AC) et passe par le milieu de [AC] : c'est la médiatrice de [AC].
   (GB) et (BD) sont perpendiculaires à (AC), donc (GB) et (BD) sont confondues, (GB) est donc la médiatrice de [AC].
   (GB) est à la fois hauteur issue de G et médiatrice de [AC], le triangle GAC est donc isocèle en G.

3. On a démontré dans la question 2 que les droites (DB) et (GB) sont confondues, donc les points D, G et B sont alignés.

Questions complémentaires à l'exercice 3

Dans l'esprit des textes officiels qui précisent « les grandeurs avant leurs mesures », il est préférable de proposer l'exercice A avant l'exercice B.
En effet, pour l'exercice A, il est possible de proposer des figures ayant la même aire que le polygone P en reproduisant P et en en déplaçant un morceau. La mesure de l'aire en prenant l'aire d'un petit carreau comme unité est également possible, mais elle n'est pas nécessaire.

Pour la figure F, l'élève peut :

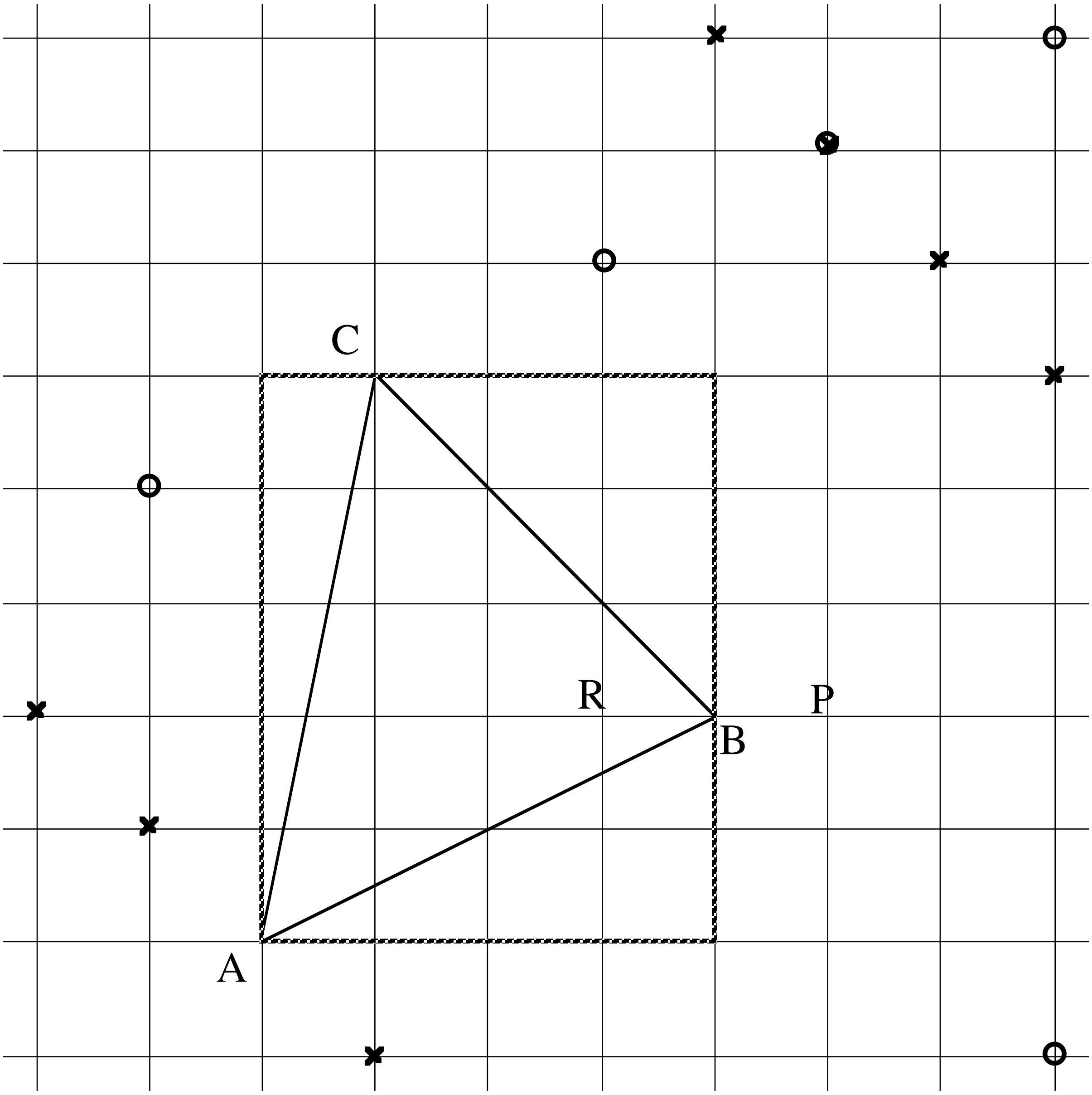
- Compter les carreaux entiers (il y en a 4) et les moitiés de carreau (il y en a 8) puis remarquer que 8 moitiés de carreau font 4 carreaux et conclure.
- Associer les demi-carreaux situés à un même sommet du carré (ou ceux situés sur un même côté) pour faire un carreau (par exemple en les coloriant d'une même couleur, ou en déplaçant un des deux demi-carreaux pour former effectivement le carreau).
- Découper le carré par ses diagonales en quatre triangles identiques, déterminer par une méthode analogue à une des deux précédentes l'aire d'un des triangles, puis multiplier par 4 l'aire obtenue.
- Découper le carré par ses diagonales en quatre triangles identiques, puis les déplacer pour former un rectangle. Déterminer l'aire de ce rectangle en effectuant 2 x 4 (ce qui ne nécessite pas de connaître une formule, il suffit de remarquer que le rectangle contient deux rangées de quatre carreaux chacune).

Pour la figure C l'élève peut :

- Remarquer qu'avec deux triangles identiques à C on peut former un rectangle dont l'aire mesure 2. L'aire de chaque triangle est alors la moitié de l'aire du rectangle.

- Remarquer qu'en déplaçant le petit triangle situé en haut de la figure C on peut former un carreau unité, l'aire de la figure C mesure donc 1.

Exercice 3



Pour calculer l'aire de ABC, on peut utiliser le rectangle tracé en pointillé sur la figure.
L'aire de ABC s'obtient en soustrayant les aires des trois triangles rectangles de celle du rectangle.

Aire de ABC = $4 \times 5 - \frac{1 \times 5}{2} - \frac{3 \times 3}{2} - \frac{2 \times 4}{2} = 20 - 2{,}5 - 4{,}5 - 4 = 9$

Les aires des quadrilatères ABCR et ABCP mesurent 2,5 unités.
La méthode de calcul la plus simple consiste à découper le quadrilatère ABCR en deux triangles, ABR et CBR.