Concours blanc du 12 Décembre 2008.
Corrigé de l'épreuve de mathématique.

Exercice 1

1) D est un point du cercle de diamètre [AB] donc le triangle ABD est rectangle en D.

2) O est le centre du cercle et [AB] en est un diamètre, donc O est le milieu de [AB].
La médiatrice de [AB] passe par J et par le milieu O de [AB], c'est donc la droite (OJ), par conséquent $(OJ) \perp (AB)$.
Une version condensée de cette étape disant seulement :
(OJ) est la médiatrice de (AB) donc (OJ) $\perp$ (AB) est acceptable.
La médiatrice de [AO] passe par D et par le milieu I de [AO], c'est donc la droite (ID), par conséquent $(ID) \perp (AO)$. Comme (AB) et (AO) sont confondues, $(ID) \perp (AB)$
$(OJ) \perp (AB)$ et $(ID) \perp (AB)$ donc (OJ) // (ID)
Dans le triangle AOJ, la droite (ID) passe par le milieu du côté [OA] et est parallèle au côté (OJ) donc elle passe par le milieu du côté [AJ] qui est alors le point D.

3) J est sur la médiatrice de [AB] donc AJ = JB
ABD est rectangle en D, donc (BD) est perpendiculaire à (AD) et par conséquent à (AJ). De plus D est le milieu de [AJ], donc (BD) est la médiatrice de [AJ].
(BD) est la médiatrice de [AJ] donc JB = AB
AJ = JB et JB = AB. Le triangle AJB a donc trois côtés de même longueur, il est donc équilatéral.

4) Dans le triangle BIK, l'angle de sommet B mesure 60° (car ABJ est équilatéral), l'angle de sommet I mesure 90° (car la médiatrice de [AO] est perpendiculaire à [AO]) donc l'angle $\widehat{BKI}$ mesure 180° - 90° - 60° = 30°
On montre de la même façon que $\widehat{ADI}$ = 30°. Or $\widehat{KDJ}$ et $\widehat{ADI}$ sont opposés par le sommet donc $\widehat{KDJ}$ =30°
Dans le triangle KDJ, les angles de sommets K et D sont égaux, donc KDJ est isocèle en J.

5) Constructions possibles du point L :
Tracer un arc de cercle de centre K et de rayon JA, un arc de cercle de centre A et de rayon JK. Il y a deux intersections possibles, l'une donne un quadrilatère croisé, l'autre est le point L cherché.
Propriété implicitement utilisée : un quadrilatère non croisé dont les côtés opposés sont égaux deux à deux est un parallélogramme.
Construire le milieu X de [AK] puis le symétrique de J par rapport à X. Propriété implicitement utilisée : un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu est un parallélogramme.

6) Construction du point M :
Construire le cercle de diamètre [KB] puis placer M sur ce cercle tel que KI = KM (deux positions possibles dont une seule donne un quadrilatère convexe).

Exercice 2

1) Pour que N soit plus grand que N', il faut et il suffit qu'**une** des deux conditions suivantes soit remplie :
première condition : $m > d$
deuxième condition : $m = d$ et $c > u$

2) a) N - N' = 1000 m + 100 c + 10 d + u - (1000 d + 100 u + 10 m + c)
N - N' = 1000 m + 100 c + 10 d + u - 1000 d - 100 u - 10 m - c
N - N' = 990 m - 990 d + 99 c - 99 u
N - N' = 99 (10 m - 10 d + c - u).
or le nombre écrit dans les parenthèses est un entier naturel non nul, donc N - N' est multiple de 99.

b) $999 = 10 \times 99 + 9$, ce n'est pas un multiple de 99. D'après la question précédente il est donc impossible que ce soit la valeur de N - N'.

c) $5940 = 99 \times 60$. En utilisant la factorisation de la question a) les nombres N répondant à la questions sont tels que :
(10 m - 10 d + c - u) = 60 ce qui peut s'écrire 10 (m-d) + (c-u) = 60.
10 (m-d) est un multiple de 10, 60 également, (c-u) doit donc être multiple de 10.
c et u étant deux nombres inférieurs à 10, la seule valeur possible est c-u = 0 d'où c = u.
On a alors 10 (m-d) = 60, d'où m - d = 6 m = d + 6.

Les 4 couples (m,d) possibles sont donc les suivants :
(9, 3) (8, 2) (7, 1) (6, 0)
Dans chacun de ces cas, Il y a 10 possibilités pour la valeur commune à c et u qui peut varier de 0 à 9.
Conclusion : il y a 40 nombres qui répondent à la question :
dix d'entre eux s'écrivent $\overline{9x3x}$, x désignant un des chiffres 0, 1, 2,…,9
dix s'écrivent $\overline{8x2x}$, dix s'écrivent $\overline{7x1x}$ et dix $\overline{6x0x}$

3) P = 125 e + 25 f + 5 g + h P' =125g + 25 h + 5 e + f
P - P' = 125 e + 25 f + 5 g + h - (125g + 25 h + 5 e + f)
P - P' = 125 e + 25 f + 5 g + h - 125g - 25 h - 5 e - f
P - P' = 120 e - 120 g + 24 f - 24 h
P - P' = 24 (5 e - 5 g + f - h)
or (5 e - 5 g + f - h) est un nombre entier naturel non nul, donc P - P' est un multiple de 24.

Questions complémentaires :

1) Le système égyptien et notre système usuel ont en commun d'utiliser des groupements par 10 puis par 100, par 1000…

Différence fondamentale : le système décimal usuel est un système de position : la valeur d'un chiffre dépend de sa position dans le nombre. Le chiffre « 3 » de 341 désigne le nombre 300 alors que celui de 23 désigne le nombre 3. Dans le système égyptien, un même signe a toujours la même valeur quelle que soit sa position dans l'écriture.

D'autres différences importantes sont en fait des conséquences de celle citée ci-dessus :
- Dans le système égyptien, aucun signe ne désigne l'absence de quantité, alors que le chiffre « 0 » est nécessaire dans notre système de position.
- Pour écrire des nombres entiers aussi grands que l'on veut, les dix chiffres de notre système décimal suffisent, alors que dans le système égyptien un nouveau chiffre est nécessaire pour désigner chaque puissance de 10.
- Le nombre de chiffres dans l'écriture d'un nombre est un critère permettant de comparer les nombres dans notre système, pas dans le système égyptien (1 000 000 s'y écrit avec un seul chiffre, mais 38 avec 11 chiffres).

2) Travailler sur la numération égyptienne au cycle 3 est intéressant car cela permet, par contraste, de mettre en évidence les propriétés de notre système décimal usuel (rôle du zéro, valeur des chiffres dépendant de leur position). Le choix du cycle 3 est pertinent car l'utilisation du système décimal pour des entiers pas trop grands est alors automatisée pour beaucoup d'élèves. L'observation d'un système différent permet alors de revenir à l'explicitation des automatismes.

3) a) Comme indiqué dans la question précédente, le but n'est pas l'étude du système de numération égyptienne pour lui même, mais pour retravailler les propriétés du système décimal, le choix des auteurs de faire une synthèse portant sur le système décimal est donc judicieux.

b) Le choix des nombres proposés dans l'exercice 2 est intéressant parce qu'il met en évidence deux des différences entre les deux systèmes de numération :
Le fait que l'ordre des chiffres n'importe pas dans le système égyptien fait l'objet de la deuxième partie de l'exercice.
Les nombres proposés comportent un zéro dans notre système décimal.

Exercice 3

1) Considérons le point K, milieu de [FC]

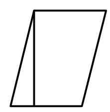
Les triangles BDF, BFK et BKC ont des bases de même longueur (DF = FK = FC) et une hauteur commune [BC]. Ils ont donc des aires égales.
La somme des aires de ces trois triangles est égale à l'aire de BDC, soit la moitié de celle du rectangle ABCD.
Chacun de ces triangles a donc pour aire un sixième de l'aire de ABCD.
Autre possibilité de réponse : l'aire de DBF est $\frac{1}{2}\left(\frac{DC}{3}\times BC\right) = \frac{DC \times BC}{6}$, soit $\frac{1}{6}$ de l'aire du rectangle ABCD.

2) Il découle directement de la question précédente que l'aire de BCF est égale à un tiers de l'aire de ABCD.

On montre de la même façon, à l'aide du point H, milieu de [ED], que l'aire de DEC est égale à un tiers de l'aire de ABCD.
On déduit des deux points précédents que les triangles BCF et DEC ont des aires égales.
Le quadrilatère EGFD et le triangle BCG sont obtenus en enlevant aux triangles BCF et DEC, dont les aires sont égales, le même triangle CFG. EGFD et BCG ont donc des aires égales.

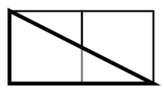
Questions complémentaires.

1) Un élève peut montrer en traçant un segment sur chaque figure que A et B peuvent chacun se découper en un triangle et un trapèze identiques sur les deux figures, ce qui établit l'égalité des aires.



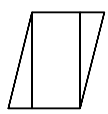
Variante 1: il peut dessiner le même segment sur une des figures et montrer comment on peut en déplaçant un morceau la transformer en l'autre figure.
Variante 2 : il peut dessiner les mêmes segments et montrer que les deux figures peuvent se transformer en un même carré par déplacement des morceaux.

Un élève peut tracer le quadrillage à l'intérieur des figures et dénombrer les carreaux en les comptant de un en un.



Il devra pour cela remarquer que les triangles tels que celui-ci ont une aire égale à celle d'un carreau, soit par découpage et déplacement d'un morceau, soit parce que ce triangle recouvre la moitié d'un rectangle de deux carreaux.

Un élève peut également utiliser une procédure s'appuyant sur le calcul d'aires de rectangles et de triangles rectangles, en prenant pour unité l'aire d'un carreau du quadrillage
La figure A peut par exemple se découper en un rectangle de 2 carreaux sur 4, dont l'aire mesure 8 unités et deux triangles rectangles ayant chacun pour aire la moitié d'un rectangle identique au précédent soit 4 unités.



L'aire de la figure A mesure alors 8 + 4 + 4 = 16 unités

La figure B est la moitié d'un rectangle de 4 carreaux sur 8, elle mesure alors 32 : 2 = 16 unités.

Un élève peut enfin paver les deux figures avec une surface étalon pertinente : le triangle rectangle 2 par 4, ou le triangle rectangle de 1 par 2 après avoir évalué l'aire de ce triangle par une des méthodes décrites précédemment.

2) Deux défauts majeurs de cet échantillon :

La réponse serait la même si on demandait de ranger par périmètre croissant, un élève qui confondrait les deux notions serait donc conforté dans son erreur.

L'écart entre les aires des différentes figures est trop grand, le rangement peut se faire de façon purement perceptive ou par inclusion des figures les unes dans les autres. Il n'est nécessaire ni de transformer les figures en figures d'aires égales, ni de dénombrer des unités d'aires, or ce sont justement ces procédures qui permettent d'approfondir la compréhension de ce qu'est l'aire.

3) a)Pour exprimer l'aire de la figure F avec l'unité demandée, il faut avoir des connaissances sur les fractions car l'aire de F mesure $1u + \frac{1}{8}u$.

b) La figure de gauche permet d'établir l'inégalité 1u < aire de G
Il suffit pour cela de remarquer que les deux triangles tracés à l'intérieur de la figure G peuvent s'assembler pour former un carré unité.

La figure de droite permet d'obtenir l'inégalité aire de G < $2u - \frac{2}{8}u$

c-à-d aire de G< (7/4).u
On a donc x=(7/4) et (7/4)<2