IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.
Préparation au CRPE
Corrigé de l'épreuve blanche de mathématiques du 8 février 2008

Exercice 1

a) Les wagons du premier train mesurent chacun 160 : 10 = 16 m. Les wagons du deuxième train mesurent chacun 246 : 15 = 16,4 m. Les wagons du deuxième train sont donc plus longs.

b) Si on prend comme unité de longueur le dm, les wagons mesurent respectivement 160 et 164 dm. La longueur commune des deux trains est donc un multiple commun de ces deux nombres.
$160 = 2^5 \times 5$ $164 = 2^2 \times 41$ Le plus petit multiple commun de ces deux nombres est donc $2^5 \times 5 \times 41$ soit 6560. La plus petite longueur commune pour les deux trains est de 6560 dm soit 656 m.

c) 160 et 164 sont des multiples de 4. Les longueurs des deux trains (en dm) sont donc également des multiples de 4, ainsi que leur différence qui ne peut donc pas être égale à 30 dm.

Questions complémentaires :

a) Un wagon du premier train mesure 16 m car 16 x 10 = 160 (on s'appuie seulement sur les propriétés de la numération décimale, il n'est pas nécessaire de savoir poser la division).
Si le deuxième train était fait avec les mêmes wagons, il mesurerait 15 x 16 = 240 m.
Comme en réalité il mesure plus de 240 m, c'est que ses wagons sont plus longs.

Si on met bout à bout 3 trains identiques au premier, on obtient un train de 30 wagons qui mesure 3 x 160 = 480 m.
Si on met bout à bout 2 trains identiques au second, on obtient un train de 30 wagons qui mesure 2 x 246 = 492 m.
Les wagons du premier train sont donc plus courts.

10 wagons du premier train mesurent 160 m, alors 5 wagons mesurent 80 m, et 15 wagons mesurent 3 x 80 = 240 m, les wagons du premier train sont donc plus courts.

b) Première remarque : tu ne tiens pas compte du reste 6 dans la division par 15.
Cette remarque peut avantageusement être présentée sous forme de question : « que signifie le 6 que tu as écrit à la fin de la division ? » ou d'injonction : « calcule la longueur d'un train de 15 wagons de 16 mètres chacun ».

Deuxième remarque : Une de tes divisions ne tombe « pas juste », il y a un reste, peut-être que ce serait plus facile si tu utilisais des longueurs en dm, ou en cm.

Troisième remarque : Tu n'as pas vraiment besoin de poser la première division pour savoir que 160 c'est 16 dizaines ou 16 x 10.

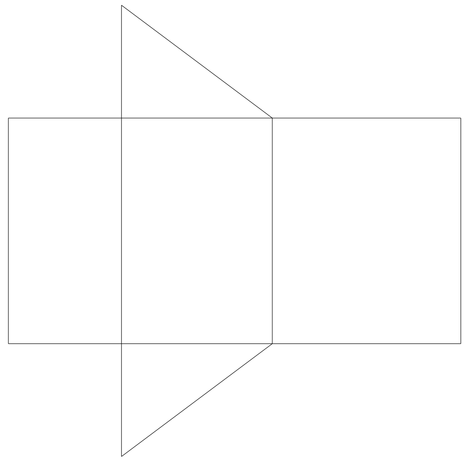
c) Il est possible de supprimer cet inconvénient en explicitant au début du processus que 246 est plus grand que 10 x 15, mais plus petit que 100 x 15. Le premier chiffre du quotient est donc nécessairement un chiffre des dizaines.
On peut renforcer ce point en faisant soustraire non pas 15 de 24, mais 150 (dix fois 15) de 246. La division se présente alors comme ci-dessous à gauche. Un autre renforcement consiste à adopter la présentation de droite dans laquelle on écrit explicitement le nombre 10 au quotient, et non le chiffre 1.

$$\begin{array}{r|l} 246 & 15 \\ \cline{2-2} -\underline{150} & 16 \\ 96 & \\ -\underline{90} & \\ 6 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|r} 246 & 15 \\ \cline{2-2} -\underline{150} & 10 \\ 96 & \underline{+6} \\ -\underline{90} & 16 \\ 6 & \end{array}$$

Une autre possibilité consiste à décrire la division en s'appuyant non pas sur le sens «combien de fois 15 dans 246 ?» mais sur le sens «Partager 246 en 15 parts égales, quelle est la valeur d'une part ?».
On peut alors décrire l'opération ainsi :
On dispose de 2 centaines, il n'est pas possible de mettre une centaine dans chaque part.
Dans 246, il y a 24 dizaines, on peut donc mettre une dizaine dans chacune des quinze parts.
Le chiffre 1 qu'on écrit au quotient est alors explicitement un chiffre de dizaine.

Exercice 2

Le patron dessiné ci-contre est un des patrons possibles du prisme décrit, à l'échelle 1/2 (Celui demandé aux candidats devait être réalisé en vraie grandeur).



L'aire de la base triangulaire du prisme est (3 x 4) / 2 = 6 cm^2
Le volume du prisme est donc égal à 6 x 6 = 36 cm^3.

Soit h la hauteur du prisme.
L'aire totale des trois faces latérales est 12 h
On a donc 12 h + 2 x 6 = 66, d'où 12 h = 54, et h = 4,5
La hauteur du prisme mesure donc 4,5 cm.

Exercice 3

a) Le nombre qui s'écrit $\overline{235}$ en base 6 est égal à 2 x 6^2 + 3 x 6 + 5, soit 95.

b) $6^2 = 36$, $6^3 = 216$ on en déduit que l'écriture en base 6 de 148 est comprise entre $\overline{100}$ et $\overline{1000}$
en effectuant la division euclidienne de 149 par 36, on trouve que 149 = 4 x 36 + 5, il en découle que 149 s'écrit $\overline{405}$ en base 6.

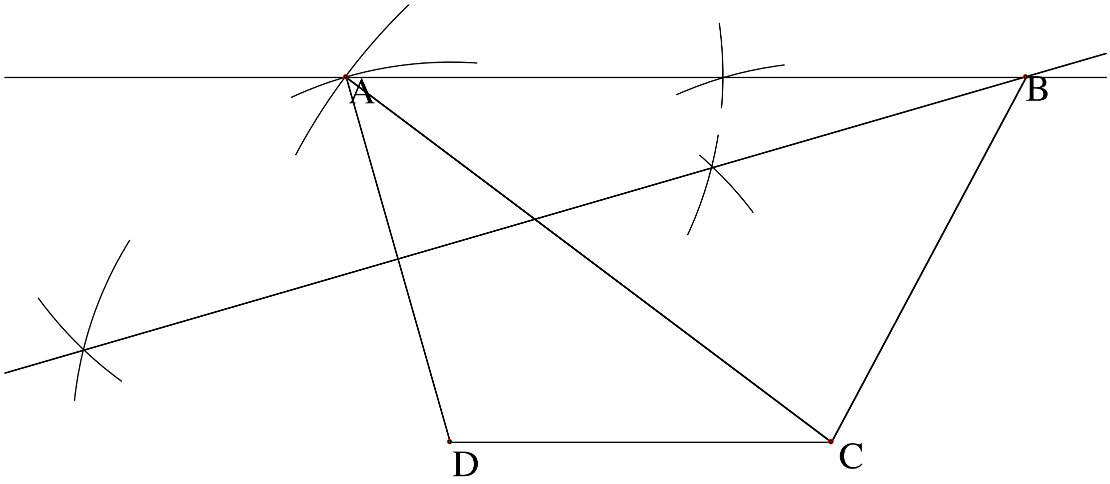
c) Les multiples de 6 sont les nombres dont l'écriture en base 6 se termine par le chiffre 0.
En effet, le dernier chiffre de l'écriture en base 6 d'un nombre est égal au reste de la division euclidienne de ce nombre par 6. Ce reste est égal à 0 si et seulement si le nombre est un multiple de 6.

d) Soit n un multiple de 3, il est égal à 3k, k étant un entier.
distinguons deux cas :
Si k est pair, alors le nombre est multiple de 6, son écriture en base 6 se termine par 0
Si k est impair, posons k = 2k' + 1 on a alors n = (2k' + 1) x 3 = 6 k' + 3. comme l'écriture en base 6 de 6k' se termine par 0, celle de n se termine par 3.
Conclusion : les multiples de 3 sont les nombres dont l'écriture en base 6 se termine par 0 ou 3.

Exercice 4

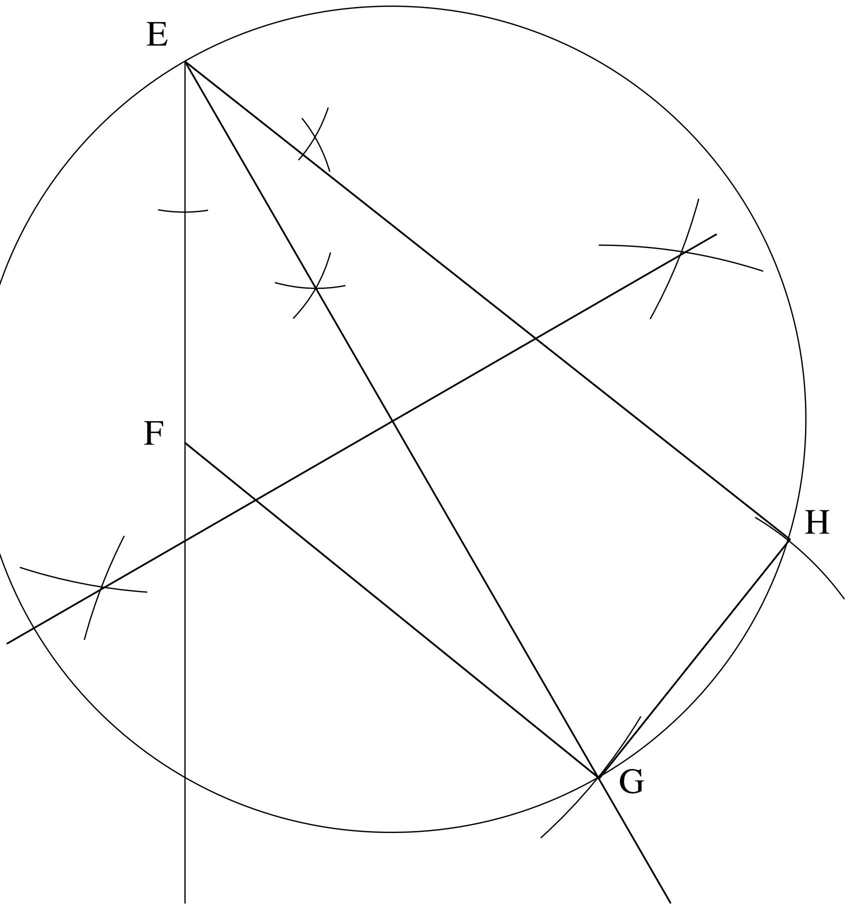
Les arcs de cercles figurant sur votre construction ne sont pas nécessairement les mêmes que sur ce corrigé, cependant on doit voir clairement :

- *Deux arcs de cercle permettant de justifier le placement de l'un des trois points de ACD.*
- *Les arcs permettant le tracé de la médiatrice de [AD].*
- *Les arcs permettant le tracé de la parallèle à (DC) passant par A.*



Sur la deuxième figure, doivent figurer notamment :

- *Des traces permettant de justifier l'angle de 30°, par exemple le tracé au compas d'un triangle équilatéral et d'une de ses bissectrices.*
- *La médiatrice de [EG], qui permet d'en déterminer le milieu, et le cercle de diamètre [EG] sur lequel se situe le point H.*



Questions complémentaires.

a) Le choix des auteurs est judicieux, car l'étude des quadrilatère à partir de leurs définitions explicites et de leurs propriétés caractéristiques relève du collège. C'est seulement dans cette perspective qu'un carré est un rectangle particulier.
Il n'est pas exclu que quelques élèves de cycle 3 aient déjà perçu que le carré a toutes les propriétés du rectangle et peut donc être considéré comme tel, on leur confirmera évidemment qu'ils ont raison, mais ce n'est pas un objectif de l'école élémentaire, on ne cherchera donc pas à faire partager cette connaissance par toute la classe.

b) La justification suivante est conforme à ce qui est attendu en cycle 3 :
« La figure est un carré parce qu'elle a toutes les propriétés connues du carré. Les quatre côtés sont égaux (je les ai mesurés à la règle) et les quatre angles sont droits (j'ai vérifié à l'équerre) ».
Il se peut que certains élèves ne vérifient qu'une partie qu'ils jugent suffisante des propriétés. Par exemple les quatre côtés sont égaux et il y a un angle droit. On acceptera cette réponse qui est une approche implicite des propriétés caractéristiques du carré, mais là encore, on ne cherchera pas à la faire partager par toute la classe.

c) Première différence : les affirmations sur les propriétés élémentaires (angles droits, égalités de longueurs) sont validées par l'utilisation des outils : le fait que les côtés de l'angle coïncident avec les bords de l'équerre est une justification suffisante de la présence d'un angle droit.
Au collège, ces propriétés élémentaires devront résulter d'indications explicites de l'énoncé du problème, ou bien avoir été préalablement démontrées.

Deuxième différence : à l'école élémentaire, la justification consiste à vérifier sur la figure qui est supposée être un carré tout ce qu'on sait sur le carré. Au collège, les élèves doivent se référer à des propriétés connues caractéristiques du carré.
Par exemple :
Un losange ayant un angle droit est un carré.
Un rectangle dont deux côtés consécutifs ont la même longueur est un carré.

Troisième différence, conséquence des deux premières : Au collège, la vision du carré comme quadrilatère qui est à la fois un rectangle et un losange est indispensable. Si on considère la famille des carrés et celle des rectangles comme disjointes, les propriétés caractéristiques citées ci-dessus n'ont aucun sens.

d) Si on remplace 8cm par 12cm, les mesures sur la figure agrandies sont obtenues en multipliant par 2 celles du modèle et non par 4/3 comme avec la valeur 8 du manuel.
L'utilisation massive de cette connaissance est alors possible, et l'analyse de la figure (présence de milieux, d'un losange, de carrés) ne sert plus à rien. Il suffit de repérer et reproduire certains angles droits et de doubler les mesures de longueur du modèle.
Par exemple pour placer F sur [AB] dans la version du manuel, il faut utiliser le fait que F est le milieu de [AB], d'où on déduit qu'il est à 4 cm de A. Dans la version alternative, on mesure [AF] à la règle sur le modèle (3 cm) et on en déduit que [AF] mesure 6 cm (le double de 3 cm) sur le modèle, sans avoir besoin de prendre conscience que F est le milieu de [AB].
La version du manuel est donc préférable à l'alternative parce qu'elle conduit à une analyse beaucoup plus fine de la figure.
La version alternative peut sembler préférable si l'objectif est précisément de faire prendre conscience que dans un agrandissement toutes les longueurs sont multipliées par un même nombre, mais il n'est pas certain que dans cette hypothèse le nombre 2 soit un bon choix.