Préparation du CRPE, problèmes du jour, mai 2011 (1 à 10)

Problème 1, les baguettes de bois
Jean et Cécile forment chacun une ligne en mettant bout à bout des baguettes de bois.

Toutes les baguettes utilisées par Jean ont la même longueur : 21 cm.
Toutes les baguettes utilisées par Cécile ont la même longueur : 27,3 cm.

Est-il possible que la ligne formée par Jean et celle de Cécile aient la même longueur ?

Si c'est possible on indiquera la plus petite longueur commune qui peut être obtenue.

Si ce n'est pas possible, on justifiera l'impossibilité.

Problème 2, le candidat losange.
Un quadrilatère a trois côtés égaux.
Ses diagonales sont perpendiculaires.

Ce quadrilatère est-il nécessairement un losange ?

Problème 3, tableur
On écrit le nombre 5 dans la cellule A1 d'une feuille de calcul d'un tableur.

Dans la cellule B1 on entre la formule =si(A1>2;A1-2;A1)

Dans la cellule A2 on entre la formule =si(A1<5;A1+1;0)

La cellule B1 est ensuite recopiée en tirant vers la droite.
La cellule A2 est recopiée en tirant vers la droite et vers le bas.
Remplir manuellement les valeurs affichées par ce tableur dans les cellules situées à la fois dans les colonnes A à E et les lignes 1 à 5.

Effectuer le même travail dans le cas où la cellule A2 est recopiée seulement vers le bas tandis que la cellule B1 est recopiée vers le bas et vers la droite.

Pour vérifier vos réponses, il suffit d'entrer les formules indiquées dans une feuille de calcul de n'importe quel tableur. Il n'est donc pas fourni de solution.

Problème 4, les photocopies
Un institut universitaire photocopie un million de pages dans une année.
Le papier est acheté par ramettes de 500 feuilles au prix de 6 € la ramette.
En photocopiant une partie des documents en recto-verso, l'institue fait une économie de 2700 € dans l'année.

Quelle pourcentage des pages copiées l'ont été en recto-verso ?

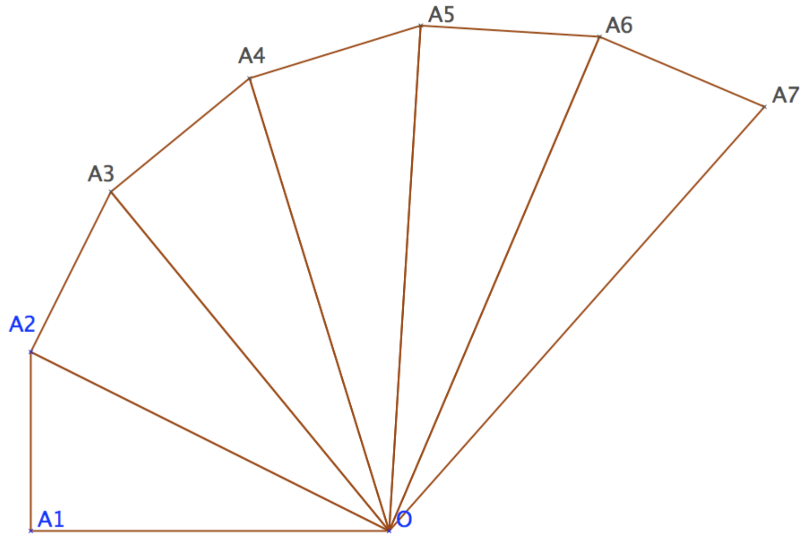
Problème 5, multiples et diviseurs
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses (les réponses seront justifiées).

Affirmation A : Si un nombre est multiple de 24 et multiple de 15, alors il est multiple de 360.
Affirmation B : Si un nombre est diviseur de 300 et de 720, alors il est diviseur de 420.

Problème 6, le tapis roulant
Un tapis roulant relie les points A et B, distants de 400 m.
Il se déplace de A vers B à la vitesse constante de 3,6 km par heure.
A 10 heures précises, deux piétons partent simultanément de A et B et marchent chacun sur le tapis à la vitesse de 5 km/h.

A quelle heure et à quelle distance du point A les piétons se rencontrent-ils ?

Problème 7, la spirale de triangles



On construit une «spirale» à l'aide de triangles rectangles comme le montre la figure ci-dessus.

On construit en premier le triangle OA_1A_2, rectangle en A1 et tel que $OA_1 = 4$ cm et $A_1A_2 = 2$ cm.

Chacun des triangles suivants, OA_2A_3, OA_3A_4, OA_4A_5… est construit ainsi :
Le triangle $OA_nA_{(n+1)}$ est rectangle en An et tel que $A_nA_{(n+1)} = 2$ cm.

- Calculer l'aire du triangle OA_6A_7.
- Parmi les 100 premiers triangles ainsi construits, combien y en a-t-il dont l'aire mesure un nombre entier de centimètres carrés ?

Problème 8, la médiane n'est pas la bissectrice
OAB est un triangle rectangle en A tel que OA = 10 cm et $\widehat{AOB} = 20°$
C est le symétrique de A par rapport à B.

Calculer une valeur approchée à 0,1° près de la mesure de l'angle $\widehat{COB}$.

Problème 9 : tirage de cartes
Dans un jeu de cartes ordinaire on ne conserve que les 7 les 8 et les 9 de chacune des quatre familles (trèfle, carreau, cœur, pique).

On tire successivement deux cartes au hasard, sans remettre la première carte dans le jeu avant de tirer la seconde.

- Quelle est la probabilité de tirer deux «7» ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir 2 cartes rouges ?
- Déduire des résultats précédents la probabilité de tirer deux cartes portant des nombres différents et la probabilité de tirer une carte rouge et une noire.

Problème 10 : construire un triangle
Tracés préalables au problème :
Tracez à la règle graduée un segment de 4 cm (plutôt vers le bord de votre feuille) et placez un point G approximativement au centre de la feuille.

Enoncé du problème :
En utilisant exclusivement le compas et la règle non graduée, tracer un triangle dont les côtés mesurent respectivement 10 cm, 10 cm et 16 cm et dont G soit le centre de gravité.

Indications

Problème 1, les baguettes de bois
La longueur commune si elle existe est un multiple de 21, c'est également un certain nombre (entier) de fois 27,3.
On est donc tenté d'utiliser la notion de multiples communs, voire celle de PPMC.
Cependant, ces notions n'ont de sens que pour des entiers, or 27,3 n'est pas entier, mais il est possible sans trop de difficultés de se ramener à des longueurs entières.

Une autre possibilité est de calculer les premières valeurs possibles.
On peut se faciliter le travail en ne retenant parmi les valeurs possibles pour Cécile que celles qui sont entières.

Problème 2, le candidat losange
On peut s'intéresser au triangle formé par 2 côtés consécutifs égaux et une des diagonales.

Problème 4, les photocopies
Il faut bien distinguer une page de document d'une feuille de papier, qui comporte deux pages.
Si on photocopie 1000 pages en recto verso, cela utilise 500 feuilles au lieu de 1000, l'économie est donc de 500 feuilles.

Problème 5, multiples et diviseurs
On peut envisager de passer par la décomposition des nombres dont il est question en facteurs premiers ou bien de traduire les données sous une forme algébrique, ou encore de prendre des exemples avec l'espoir de trouver un exemple qui montre que l'affirmation est fausse.

Problème 6, le tapis roulant
Il est possible de considérer les déplacements des personnages par rapport à un point immobile situé à l'extérieur du tapis (par exemple A ou B). On utilise alors leur vitesse de déplacement constituée pour une part de leur vitesse par rapport au tapis, pour une autre part de la vitesse du tapis.

On peut aussi considérer les déplacements par rapport au tapis, calculer ainsi le moment de la rencontre et le point du tapis où elle se situe et n'introduire qu'à la fin le déplacement du tapis.

On peut également considérer que le personnage qui part de B se rapproche de l'autre à 10 km/h, en déduire le moment de la rencontre et chercher ensuite le lieu en introduisant la vitesse du tapis.

Problème 7, la spirale de triangles
Il s'agit d'utiliser le théorème de Pythagore de façon répétée.
Rien n'oblige à exprimer la longueur de chacun des côtés $[OA_n]$ successifs, pour la plupart d'entre eux on peut se contenter de leurs carrés.

Plutôt que de calculer les aires des 100 triangles, on peut chercher les valeurs de OA_n qui conduisent à une aire entière et se demander lesquelles peuvent être atteintes.

Problème 8, la médiane n’est pas la bissectrice
Le triangle COB n’est pas rectangle, il faut donc utiliser un autre triangle rectangle existant déjà dans la figure ou que vous prendrez l’initiative de construire.

Problème 9 : tirage de cartes
Pour les deux premières questions, la difficulté essentielle consiste à faire dénombrer correctement les tirages possibles.

On peut en faire une liste exhaustive (mais avec 12 cartes les nombres commencent à être un peu élevés) ou se contenter d’évoquer une organisation des possibilités (tableau à double entrée, arborescence…) permettant de calculer leur nombre sans les écrire toutes.

La question 3 demande de «déduire» il faut donc absolument montrer le lien avec les deux premières questions.
Si on sait quelle est la probabilité de tirer deux «7», on a la même probabilité de tirer deux «8» ou deux «9».
Par ailleurs tirer deux nombres différents c’est ne tirer ni deux 7 ni deux 8 ni deux 9.

Problème 10 : construire un triangle
Faites un schéma à main levée d’un triangle ayant les mesures voulues et placez ensuite son centre de gravité (le schéma à main levée n’est pas la solution, il n’est pas réalisé dans l’ordre demandé, c’est seulement un outil de recherche).
Utilisez votre schéma pour raisonner : que pouvez vous dire sur ce triangle. Vous utiliserez ensuite les résultats de vos déductions pour réaliser la figure dans l’ordre imposé.

Solutions

Problème 1, les baguettes de bois
Exprimons les longueurs en millimètres.

Chaque baguette utilisée par Jean mesure 210 mm, la longueur en mm de la ligne qu'il obtient est donc un multiple de 210 et si Jean a suffisamment de baguettes, il peut obtenir une longueur égale à n'importe quel multiple de 210

De même, la longueur en mm de la ligne de Cécile est un multiple de 273.

Il existe toujours des multiples communs à deux entiers a et b (a x b par exemple) il est donc possible que Jean et Cécile obtiennent une baguette de même longueur.
La plus petite longueur possible correspond au plus petit multiple commun à 210 et 273.

210 = 2 x 3 x 5 x 7
273 = 3 x 7 x 13

Le ppmc de 210 et 273 est donc 2 x 3 x 5 x 7 x 13 = 2730

La plus petite longueur que peuvent obtenir Jean et Cécile est 2730 mm, ou 2,73 m.
Cela correspond à l'utilisation de 13 Baguettes pour Jean et 10 baguettes pour Cécile.

Autre solution :
Pour que les longueurs soient les mêmes, le nombre de baguettes utilisées par Cécile doit être un multiple de 10 pour que la longueur soit un nombre entier de cm.

La plus petite longueur à tester est donc 10 x 27,3 cm = 273 cm.
Or 273 = 13 x 21, Jean peut donc obtenir cette même longueur en utilisant 13 baguettes.

Jean et Cécile peuvent donc fabriquer deux lignes de même longueur, la plus petite longueur qu'ils peuvent obtenir tous les deux est 273 cm.

Problème 2, le candidat losange
Soient ABCD le quadrilatère en question, [AB], [BC] et [CD] ses côtés égaux.

Dans le triangle BCD, la droite (CA) est perpendiculaire au côté [BD] et passe par le sommet C, c'est donc la hauteur issue de C, or le triangle BCD est isocèle en C, c'est donc également la médiatrice de [BD].

A est sur la médiatrice de [BD] donc AD = AB.
Il en résulte que les quatre côtés du quadrilatère ABCD sont égaux, c'est donc un losange.

Problème 4, les photocopies
L'économie de 2700 € correspond à 2700 : 6 = 450 ramettes, soit 225000 feuilles.
Pour économiser une feuille, il faut tirer deux pages en recto-verso (on utilise alors une seule feuille au lieu de deux), l'institut a donc tiré 450 000 pages en recto-verso, soit 45% du total.

Problème 5, multiples et diviseurs
120 = 5 x 24 = 8 x 15 et 120 n'est pas multiple de 360, l'affirmation A est donc fausse.

Décomposons 300 et 720 en facteurs premiers.
300 = 2 x 2 x 3 x 5 x 5 720 = 2 x 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 5
le pgcd de 300 et 720 est donc 2 x 2 x 3 x 5, soit 60.
Tout diviseur commun à 300 et 720 est un diviseur de son pgcd, or 420 est un multiple de 60.
Tout diviseur de 300 et de 720 est donc un diviseur de 420.
L'affirmation B est donc vraie.

Autre méthode pour l'affirmation B :
Soit un nombre entier N diviseur de 300 et de 720, il existe donc des entiers n et m tels que
Nn = 300 et Nm = 720
On en déduit que 720 - 300 = Nm - Nn = N (m - n)
Or m - n est un entier, l'égalité ci-dessus établit donc que N est un diviseur de 720 - 300 c'est à dire de 420.
L'affirmation B est donc vraie.

Problème 6, le tapis roulant
La distance entre les deux personnages diminue de 10 km en une heure ou 3600 secondes.
Elle diminue donc de 100 m en 36 secondes et de 400 m en 144 secondes soit 2 minutes et 24 secondes.
Pendant cette durée, comme les deux personnages marchent à la même vitesse, chacun aura parcouru 200 m sur le tapis.
Le tapis qui avance à 3,6 km/h, c'est à dire 1m par seconde aura avancé de 144 m dans le même temps.
La rencontre aura donc lieu à 344 m du point A, à 10 heures 2 minutes 24 secondes.

Problème 7, la spirale de triangles
En utilisant le théorème de Pythagore successivement dans chacun des triangles rectangles, on obtient :

$$(OA_1)^2 = 16$$

$$(OA_2)^2 = 16 + 4 = 20$$

$$(OA_3)^2 = 20 + 4 = 24 = 16 + 2 \times 4$$

....

$$(OA_n)^2 = 16 + (n-1) \times 4 = 12 + 4n$$

On a dont en particulier (OA_6)^2 = 12 + 4 x 6 = 36 d'où OA_6 = 6
L'aire de OA_6A_7 mesure donc (en centimètres carrés) : (6 x 2) : 2 = 6

L'aire de chaque triangle OA_nA_{n+1} se calcule par (OA_nA_{n+1}) x 2 : 2
La mesure en centimètres carrés de l'aire de OA_nA_{n+1} est donc le même nombre que la mesure en centimètres de OA_n.
La deuxième question revient donc à trouver quelles sont les valeurs de n pour lesquelles OA_n est un nombre entier.

On a $\left(OA_{100}\right)^2 = 12 + 4 \times 100 = 412$

Parmi les nombres inférieurs à 412, quels sont les carrés parfaits multiples de 4 (pour pouvoir être de la forme 12 + 4n) ?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400	441

Dans le tableau ci-dessus, dont la deuxième ligne contient les carrés des nombres de la première ligne, on a grisé les valeurs pouvant convenir (4 et 16 sont trop petits pour être les aires de triangles de la figure).

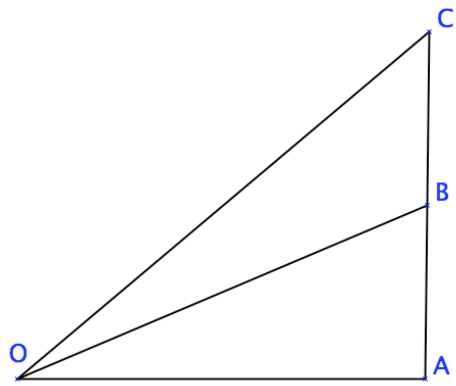
Parmi les 100 premiers triangles, il y en a donc 8 dont les aires mesurent un nombre entier de centimètres-carrés.

A titre d'exemple, la valeur 144 du tableau correspond à $\left(OA_n\right)^2 = 12 + 4n = 144$

On peut en déduire que 4n = 132 donc n = 33, ce qui signifie que OA_{33} mesure 12 cm donc que l'aire de $OA_{33}A_{34}$ mesure 12 cm^2.

Problème 8, la médiane n'est pas la bissectrice

Dans le triangle OAB, rectangle en A, on a :



$$\tan \widehat{AOB} = \frac{BA}{OA} = \frac{BA}{10}$$

On en déduit que

$$BA = 10 \times \tan 20°$$

C est le symétrique de A par rapport à B donc CA = 2 BA.

$$CA = 20 \times \tan \widehat{20°}$$

Dans le triangle OAC, rectangle en A, on a :

$$\tan \widehat{AOC} = \frac{CA}{OA} = \frac{CA}{10} = 2 \tan 20°$$

On en déduit (à l'aide de la calculatrice) que $36° < \widehat{AOC} < 36{,}1°$

Or $\widehat{BOC} = \widehat{AOC} - \widehat{AOB} = \widehat{AOC} - 20°$

On a donc $16° < \widehat{BOC} < 16{,}1°$

On peut donc proposer comme valeur approchée à 0,1 degré près de $\widehat{COB}$ 16° ou bien 16,1°.

Problème 9 : tirage de cartes

Calcul du nombre de tirages possibles :

12 cartes peuvent être choisies en premier, et pour chacune d'entre elles 11 cartes peuvent être choisies.

Il y a donc 12 x 11 = 132 issues possibles.

Parmi ces issues, 12 correspondent à un tirage de deux «sept». Il y a en effet 4 choix possibles d'un «7» pour la première carte, et pour chacun de ces choix, 3 choix possibles d'un «7» pour la deuxième carte.

La probabilité de tirer deux «7» est donc de 12/132 soit 1/11.

Remarque : *on peut décider que l'événement élémentaire est constitué du tirage de deux cartes (au lieu de réfléchir carte par carte). dans ce cas, on ne trouvera que 66 tirages possibles dont 6 sont favorables ce qui ne change pas la probabilité.*
Cependant, cette méthode n'est pas conseillée pour deux raisons :
le dénombrement des 66 tirages possibles est plutôt plus difficile que celui des 132 cas de l'autre interprétation.
Cette façon de voir serait erronée dans le cas d'un tirage avec remise : 7 de carreau et 7 de pique peut s'obtenir de deux façons différentes suivant l'ordre alors que 7 de pique et 7 de pique ne peut s'obtenir que d'une seule façon.

Il y a 6 façons de tirer une première carte rouge, et pour chacune d'entre elles 5 façons de tirer une seconde carte également rouge.
Le nombre de tirages possibles de deux cartes rouges est donc de 6 x 5 = 30, ce qui correspond à une probabilité de 30/132 = 5/22

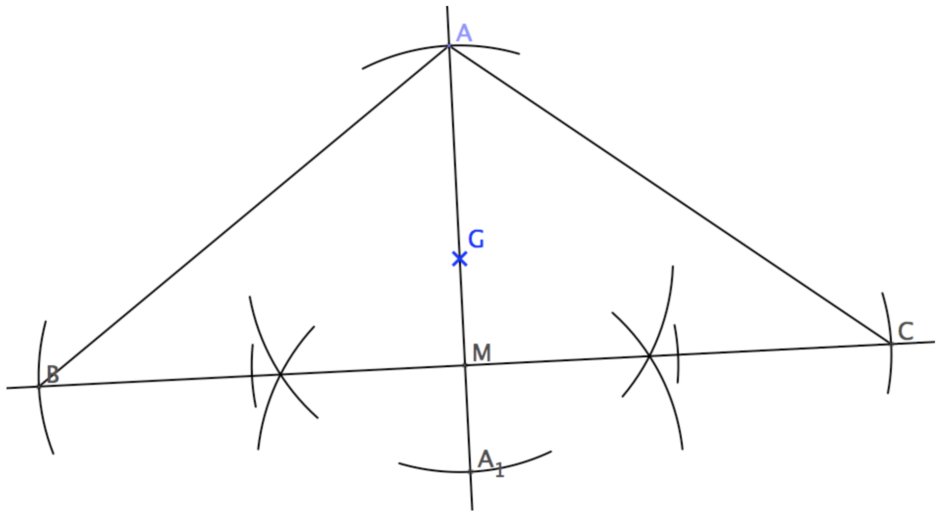
La probabilité d'obtenir deux cartes noires est la même que celle d'obtenir deux cartes rouges, c'est à dire 5/22.
Si on réunit les trois possibilités suivantes :
  tirer deux cartes rouges
  tirer deux cartes noires
  tirer une carte rouge et une noire
on obtient tous les cas possibles, la somme des probabilités de ces trois événements est donc 1.

La probabilité de tirer une carte rouge et une noire est donc $1-\frac{5}{22}-\frac{5}{22}=\frac{12}{22}=\frac{6}{11}$

La probabilité d'obtenir deux «7» est la même que celle d'obtenir deux «8» ou deux «9»La somme des probabilités des événements «tirer deux 7» «tirer deux 8» «tirer deux 9» et «tirer deux nombres différents» est 1.

La probabilité de tirer deux nombres différents est donc : $1-3\times\frac{1}{11}=\frac{8}{11}$

Problème 10 : construire un triangle



Le dessin fourni ici est un agrandissement de celui qui est demandé.
Tous les arcs de cercle utilisés ont un rayon de 4 cm.
Seuls ceux utilisés pour tracer la médiatrice de [GA1] pourraient avoir un autre rayon.

Le tracé suppose d'avoir fait, à partir du schéma à main levé, les déductions suivantes (mais aucune justification n'était demandée) :
G est le centre de gravité du triangle, (AG) est donc une médiane et le point M, intersection de (AG) et [BC] est le milieu de [BC]
Le triangle ABC est isocèle en A, donc la médiane [AM] est aussi une hauteur, ce qui permet d'établir que AM = 6 cm en utilisant le théorème de Pythagore.

Le centre de gravité d'un triangle est situé au deux tiers de chaque médiane en partant du sommet, ce qui permet de déduire que AG = 4 cm et GM = 2 cm.