Préparation du CRPE, problèmes du jour, mai-juin 2011 (11 à 20)

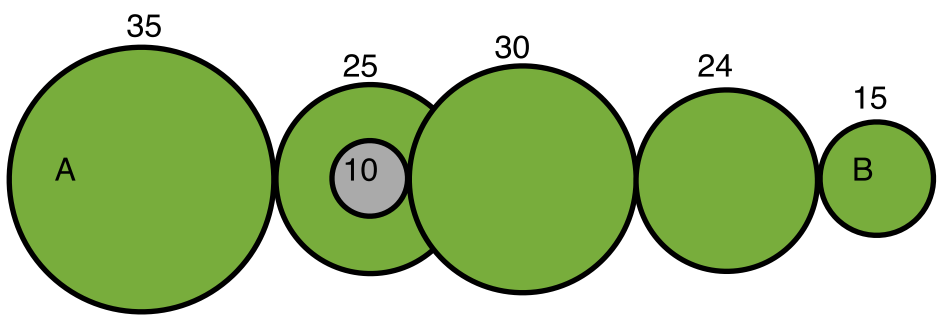
Problème 11 : puissances de nombres entiers
On donne $A = 4^{10} + 4^{10}$; $B = 5^{10} + 5^{10}$; $C = 2^{16} + 2^{8}$; $D = 15 \times 5^{10} + 10 \times 5^{10}$

- Ecrire le nombre A sous la forme 2^m (m étant un entier) ou justifiez l'impossibilité de le faire.
- Ecrire le nombre B sous la forme 5^n (n étant un entier) ou justifiez l'impossibilité de le faire.
- Ecrire le nombre C sous la forme 2^p (p étant un entier) ou justifiez l'impossibilité de le faire.
- Ecrire le nombre D sous la forme 5^n (r étant un entier) ou justifiez l'impossibilité de le faire.

Problème 12 : des pavés à ranger
Combien peut-on ranger de pavés droits identiques dont les dimensions sont 5 cm, 8 cm et 12 cm dans une boîte dont l'intérieur a la forme d'un pavé droit de dimensions 10 cm, 16 cm et 20 cm ?

Problème 13 : les engrenages
Le schéma ci dessous représente un système d'engrenages.
Les nombres indiquent combien de dents possède chaque roue.
La roue de 10 dents et celle de 25 dents ont le même axe de rotation et sont solidaires l'une de l'autre.

La roue A effectue 15 tours, combien de tours fait la roue B ?



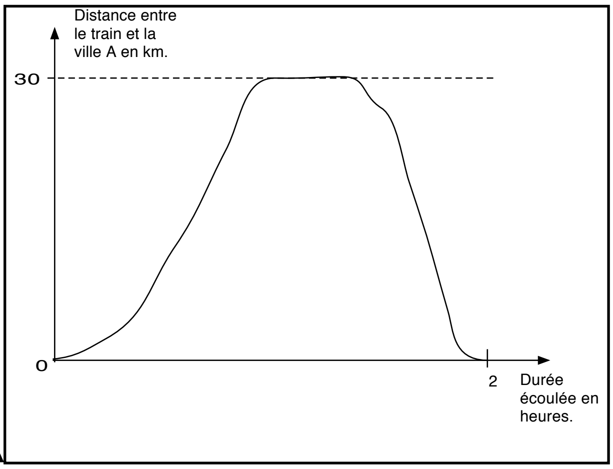
Problème 14 : division euclidienne
La division euclidienne de l'entier A par 9 a pour reste 8.

- Quel est le reste de la division de A par 3 ?
- Quel est le reste de la division de A + 100 par 9 ?
- Quel est le reste de la division de 5A par 9 ?

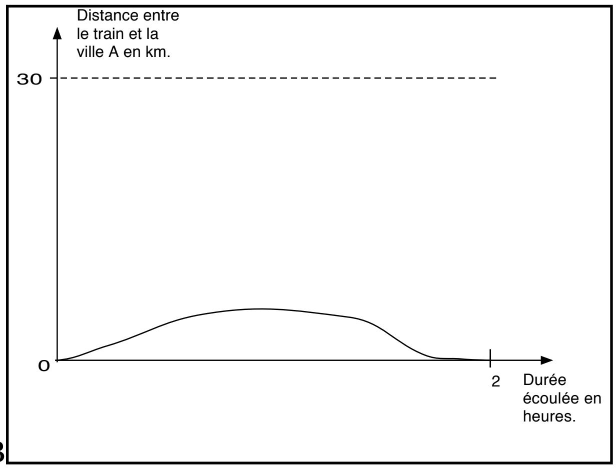
Problème 15 : nature d'un quadrilatère
ABCD est un quadrilatère convexe dont les diagonales se coupent en O.
Les aires des triangles ABO, BCO, CDO et DAO sont égales.

Que peut-on dire de la nature du quadrilatère ABCD ?

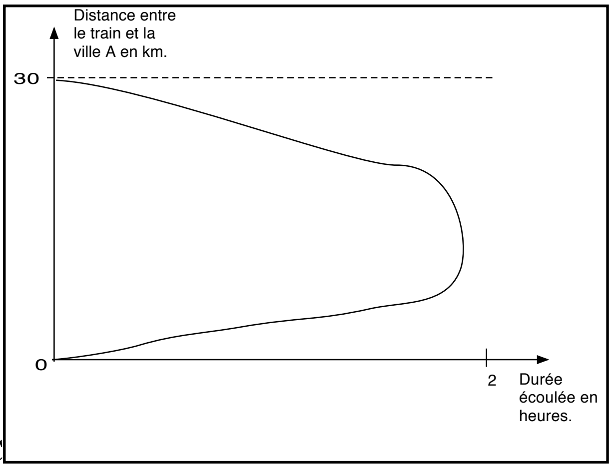
Problème 16 : représentations des déplacements d'un train.
Un train se déplace sur une ligne reliant deux villes A et B distantes de 30 km.
Parmi les schémas suivants, lesquelles sont susceptibles de représenter fidèlement les déplacements de ce train ?
Pour chaque schéma qui ne convient pas, on justifiera l'impossibilité.



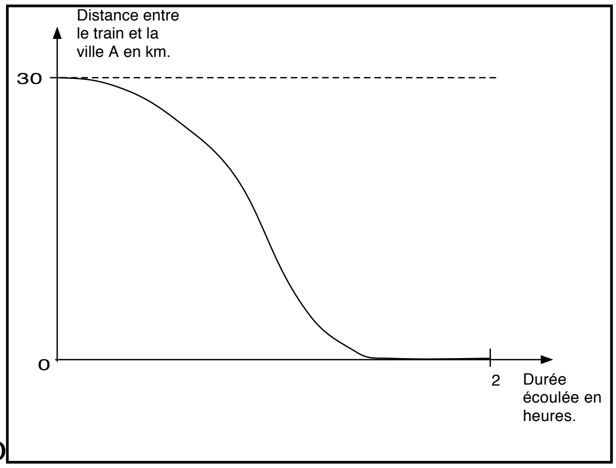
A



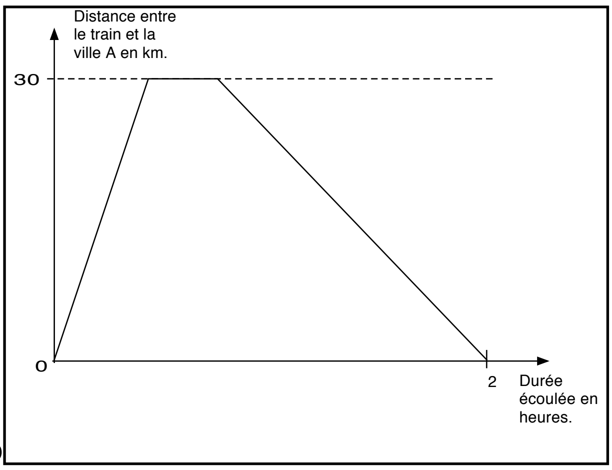
B



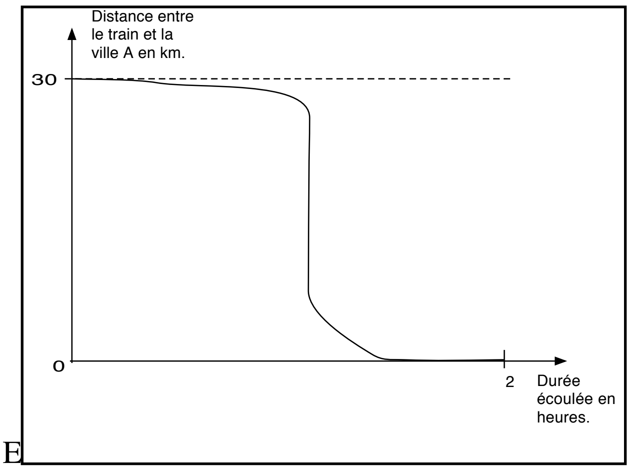
C



D



D



E

Problème 17 : baisse de prix (exprimée en fractions)
Chaque année, mon ordinateur perd un tiers de sa valeur par rapport à l'année précédente.
Au bout de combien d'années mon ordinateur vaudra-t-il moins du dixième de sa valeur initiale ?

Problème 18 : de très grands nombres
Soit A = 546 897 356 700 974 246 934 678 523 457 865 228 754 345 678 543
Démontrer qu'il n'existe aucun nombre entier p tel que $p^{50} = A$

Soit B = 689 235 462 447 096
Démontrer qu'il n'existe aucun nombre entier p tel que $p^{50} = B$

Problème 19 : des triangles avec deux droites
On considère deux droites sécantes, D et D'.
On place 20 points distincts sur D et 15 points distincts sur D', aucun d'entre eux n'étant situé à l'intersection des deux droites.

Est-il possible de tracer des triangles (de «vrais» triangles, non aplatis) de telle façon que chaque point placé sur D ou sur D' soit le sommet d'un et un seul des triangles.

Reprendre la même question en plaçant 40 points sur D et 15 sur D'

Reprendre la même question en plaçant 40 points sur D et 26 sur D'

Les réponses seront justifiées.

Problème 20 : tableur et arithmétique
Montrer comment on peut résoudre à l'aide d'un tableur le problème suivant :

Combien y a-t-il de nombres entiers vérifiant simultanément les trois critères suivants :
Le nombre s'écrit avec 4 chiffres.
C'est un carré parfait (c'est à dire le carré d'un nombre entier).
Son reste dans la division par 29 est 5.

Indications

Problème 11 : puissances de nombres entiers
Ne pas chercher à utiliser des formules de calcul sur les puissances, elles sont inutiles et risquent de vous faire écrire des absurdités si elles sont mal connues.

Ls deux idées principales à mobiliser sont les suivantes :

Savoir ce que signifie une écriture telle que 5^6
Savoir dans quels cas on peut écrire une somme donnée sous forme d'un produit, et l'utiliser y compris quand les nombres sont écrits sous forme de puissance.

De même que 7 + 7 + 7 = 3 x 7, $3^6 + 3^6 + 3^6 = 3 \times 3^6$ ce qui permet ensuite d'écrire ce nombre sous forme d'une puissance de 3.

La clé de la réussite est peut-être dans la capacité à regarder une même expression de plusieurs façons différentes : à certains moments il est utile de se demander ce que signifie 5^6, à d'autres il ne faut surtout pas y penser et le traiter comme un nombre ordinaire.

Problème 12 : des pavés à ranger
Il ne s'agit pas seulement de faire un calcul sur les volumes, il faut aussi montrer par un schéma ou une explication qu'il est réellement possible de placer les pavés.

Si la question portait par exemple sur des pavés de 2 x 2 x 100 à placer dans une boite de 20 x 20 x 20, le calcul de volume indique que chaque pavé a un volume de 400 et la boite un volume de 8000. On peut remarquer que 8000 = 20 x 400 mais pas en déduire qu'on peut placer 20 pavés dans la boite. En réalité, on ne peut pas en placer un seul.
Si on ne connaissait pas les dimensions mais seulement les volumes, la seule chose qu'on pourrait déduire du fait que le volume de la boite est égal à 20 fois celui d'un pavé est qu'il est impossible de placer plus de 20 pavés.

Problème 13 : les engrenages
On peut tout calculer en nombre de tours mais il est probablement plus simple d'utiliser le fait que pour deux roues adjacentes, si l'une tourne d'une dent l'autre également.

En revanche, pour les deux roues fixées sur le même axe, c'est le nombre de tour qui est commun et non le nombre de dents.

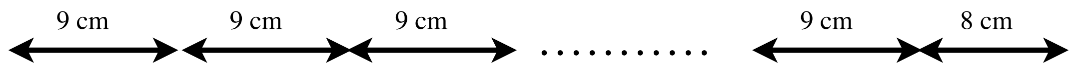
Problème 14 : division euclidienne
La rédaction de la solution s'appuiera avantageusement sur des écritures algébriques.
Cela ne signifie pas qu'on ne peut pas utiliser d'autres approches pour trouver les résultats.

Deux formes de recherche possibles au brouillon :

essayer à partir d'exemples.

Pour cela on choisit une valeur qui convient pour A, par exemple 3 x 9 + 8 = 35 ou 10 x 9 + 8 = 98 et on effectue les divisions demandées à partir de ces valeurs.
On est alors guidé par l'exemple pour la rédaction : si on a trouvé un reste de 1 dans l'exemple, on essaie de prouver que le reste est toujours 1. Si on n'y parvient pas c'est peut-être que le reste n'est pas toujours le même et qu'il faut distinguer plusieurs cas.

On peut aussi utiliser une représentation graphique.
Si on considère qu'on parle de longueurs mesurées en cm, un nombre ayant pour reste 8 dans la division par 9 correspond à une ligne obtenue en mettant bout à bout un certain nombre de segments de 9 cm et un unique segment de 8 cm



Pour illustrer la division par 3, il suffit de se demander combien de fois cette longueur contient 3 cm… si on imagine les segments de 3 cm juxtaposés, le reste apparaît.

Problème 15 : nature d'un quadrilatère
En choisissant convenablement le côté utilisé comme base dans les triangles d'aires égales, on peut :
soit utiliser des triangles ayant la même base… et donc des hauteurs égales,
soit utiliser des triangles ayant la même hauteur… et donc des bases égales.

Problème 17 : baisse de prix (exprimée en fractions)
Diminuer d'un tiers un nombre, c'est le multiplier par 2/3.
L'avantage de cette formulation est qu'elle permet plus facilement de calculer l'effet de plusieurs diminution successives (il suffit d'effectuer plusieurs multiplications).

C'est pour la même raison que quand on combine des augmentations ou des diminutions successives exprimées en pourcentage il est pratique de traduire «augmenter de 15%» par «multiplier par 1,15».

Problème 18 : de très grands nombres
p^{50} est un carré, c'est p^{25} x p^{25}
Le dernier chiffre du nombre peut donner des indications.
Sachant que 2^{10} est supérieur à 1000 puisque c'est 1024, on peut utiliser une valeur proche de 2^{50}

Problème 19 : des triangles avec deux droites
On utilisera le fait que, comme on ne tient compte que de triangles non aplatis, chaque triangle est dans une des deux situations suivantes :

il a deux sommets sur D et un sur D'
ou bien
il a deux sommets sur D' et un sur D.

Problème 20 : tableur et arithmétique
Plutôt que de tester tous les nombres de 1 000 à 9 999 et de tester si ce sont des carrés parfaits, il semble plus simple de construire la liste des carrés parfaits et de tester seulement le reste de la division par 29.

Le carré de 31 est 961, celui de 32 est 1 024, celui de 100 est 10 000.

Une organisation assez économique de la feuille de calcul consiste à :
inscrire dans la colonne A les nombres entiers de 32 à 99.
inscrire dans la colonne B leurs carrés.
inscrire dans la colonne C les restes dans la division de ces carrés par 29

On peut ensuite compter manuellement les «5» qui apparaissent dans la colonne C, ou bien confier ce comptage à une formule, ou encore faire apparaître le mot «oui» dans la colonne D pour chaque valeur «5» de la colonne C (et rien dans les autre cellules de la colonne D) pour faciliter le comptage.
C'est cette dernière variante que nous avons choisie dans la solution.

La connaissance de la formule donnant le reste de la division euclidienne est nécessaire.
Pour calculer le reste de la division de 53 par 8, on écrira **=mod(53;8)**
Bien entendu, comme pour n'importe quelle autre formule d'un tableur, les nombres 53 et 8 de l'exemple peuvent être remplacés par d'autres nombres explicitement indiqués ou par des références à d'autres cellules de la feuille de calcul.

Solutions

Problème 11 : puissances de nombres entiers

Ecrire le nombre A sous la forme 2^m (*m* étant un entier) ou bien justifiez l'impossibilité de le faire.

$A = 4^{10} + 4^{10}$

$A = 2 \times 4^{10}$

$A = 2 \times (4 \quad \times \quad 4 \quad \ldots \times \quad 4 \quad)$

$A = 2 \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \quad \ldots \times 2 \times 2)$

$A = 2^{21}$

Les troisièmes et quatrièmes lignes pourraient être remplacées sur une copie par $A = 2 \times 2^{20}$ *qui a l'avantage de ne pas présenter l'ambiguïté introduite par les points de suspension mais l'inconvénient de ne pas montrer le raisonnement sous-jacent.*

Ecrire le nombre B sous la forme 5^n (*n* étant un entier) ou bien justifiez l'impossibilité de le faire.

$B = 5^{10} + 5^{10}$

$B = 2 \times 5^{10}$

La deuxième forme montre que la décomposition en facteurs premiers de B comporte un facteur 2, il est donc impossible d'écrire B sous la forme 5^n.

(on pouvait aussi faire remarquer que toutes les puissances de 5 ont 5 comme chiffre des unités alors que B a 0 comme chiffre des unités ce qui établit l'impossibilité).

Ecrire le nombre C sous la forme 2^p (*p* étant un entier) ou bien justifiez l'impossibilité de le faire.

$2^{16} + 2^{16} = 2 \times 2^{16} = 2^{17}$

Il en résulte que $2^{16} < 2^{16} + 2^8 < 2^{17}$, C ne peut donc pas s'écrire sous la forme 2^p

Ecrire le nombre D sous la forme 5^n (*r* étant un entier) ou bien justifiez l'impossibilité de le faire.

$D = 15 \times 5^{10} + 10 \times 5^{10}$

$D = 25 \times 5^{10}$

$D = 5 \times 5 \times 5^{10}$

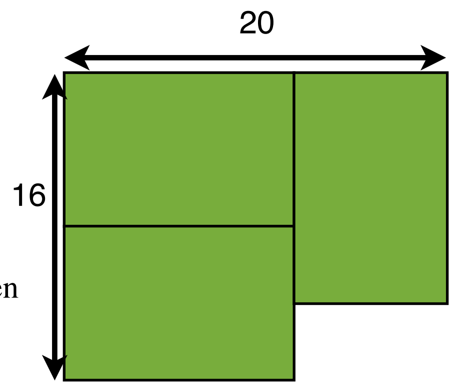
$D = 5^{12}$

Problème 12 : des pavés à ranger

Le volume de la boite est de 3200 cm³
Le volume d'un pavé est de 480 cm³

3200 = 6 x 480 + 320 il ne sera donc pas possible de placer plus de 6 pavés dans la boite.

Si on utilise la disposition ci-dessous, les arêtes non visibles sur le dessin mesurant 5 cm, on peut loger 6 pavés dans la boite en disposant deux couches identiques l'une sur l'autre.



Problème 13 : les engrenages
La roue A effectue 15 tours, soit un déplacement de 15 x 35 dents

La roue de 25 dents se déplace également de 15 x 35 dents, soit 15 x 35 : 25 = 21 tours

La roue de 10 dents, montée sur le même axe que celle de 25 dents, fait donc également 21 tours, ce qui correspond à un déplacement de 210 dents.

Chacune des roues suivantes se déplace également de 210 dents, ce qui correspond pour la roue B à un nombre de tours égal à 210 : 15, c'est à dire 14 tours.

Problème 14 : division euclidienne
La division euclidienne de l'entier A par 9 a pour reste 8.

- Quel est le reste de la division de A par 3 ?

il existe un entier q, quotient de la division de A par 9, tel que
$A = 9q + 8$
On a donc $A = 9q + 6 + 2$
$A = 3(3q + 2) + 2$
$(3q + 2)$ étant un entier, la dernière égalité établit que le reste de la division de A par 3 est 2.

Remarque : les recherches au brouillon qui permettent de savoir avant de se lancer dans l'écriture algébrique que le reste est égal à 2 augmentent les chances de penser à introduire une égalité telle que $A = 9q + 6 + 2$

- Quel est le reste de la division de A + 100 par 9 ?

$A + 100 = 9q + 8 + 100$
$A + 100 = 9q + 9 + 99$
$A + 100 = 9(q + 12)$
$(q + 12)$ étant un entier, A + 100 est multiple de 9, le reste de la division de A + 100 par 9 est 0.

- Quel est le reste de la division de 5A par 9 ?

$5A = 5(9q + 8)$
$5A = 5 \times 9 \times q + 40$
$5A = 9 \times 5 \times q + 9 \times 4 + 4$
$5A = 9(5q + 4) + 4$
$(q + 4)$ étant entier, le reste de la division de 5A par 9 est 4.

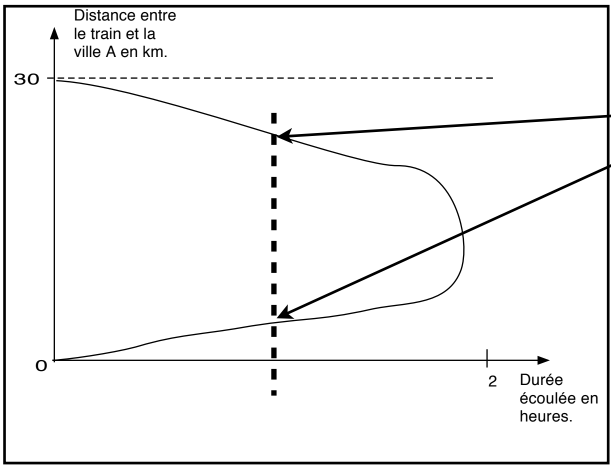
Remarque : il n'est pas utile dans ce genre de calcul d'effectuer tous les produits.
Si on écrit 5 x 9, les facteurs 5 et 9 sont plus visibles que dans 45.
Ecrire 45 n'est pas un problème car notre connaissance des tables de multiplication ou des critères de divisibilité fait qu'on retrouve aisément le facteur 9.
En revanche si on remplaçait le cas échéant 17 x 19 par leur produit 323, on risquerait d'avoir du mal à retrouver les facteurs.

Problème 15 : nature d'un quadrilatère
Considérons les triangles ABO et BCO.
Leurs aires sont égales et leurs hauteurs issues de B sont confondues, par conséquent leurs bases associées à cette hauteur ont la même longueur : AO = OC.
AO = OC et O est sur [AC], donc O est le milieu de [AC].

On démontre de la même façon que O est le milieu de [BD]

Les diagonales du quadrilatère ABCD ont le même milieu, par conséquent ABCD est un parallélogramme.

Problème 16 : représentations des déplacements d'un train
Le graphique C ne peut pas convenir parce qu'il indique que le train se trouve à deux positions différentes au même moment :



Quand une heure s'est écoulée, le train est environ à 5 km de A, mais il est également environ à 25 km de A… difficile !

Le graphique E ne peut pas convenir pour une raison voisine : à un instant donné (un peu plus d'une heure après l'origine du temps) le train parcourt instantanément une vingtaine de kilomètres.

Le graphique D ne peut pas convenir car le train se déplace à l'aller et au retour à vitesse constante or en réalité un train accélère et ralentit très progressivement.
Ce type de graphique est couramment employé pour simplifier le dessin et les calculs qui s'y rapportent : on fait comme si le train se déplaçait toujours à la même vitesse (qui est en réalité sa vitesse moyenne) mais il ne peut pas représenter fidèlement la réalité.

Problème 17 : baisse de prix (exprimée en fractions)
indiquons dans un tableau la fraction par laquelle le prix initial est multiplié en fonction du nombre d'années écoulées. Chaque valeur est calculée en multipliant la précédente par deux tiers.

nombre d'années	1	2	3	4	5	6	7	8
valeur résiduelle	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{243}$	$\frac{64}{729}$		

Le tableau permet de constater que c'est au bout de 6 ans que l'ordinateur vaut moins d'un dixième de sa valeur initiale.

en effet, $\frac{64}{729} < \frac{72{,}9}{729}$ et $\frac{72{,}9}{729} = \frac{1}{10}$, ce qui montre qu'au bout de 6 ans la valeur est inférieure au dixième de la valeur initiale

par ailleurs $\frac{32}{243} > \frac{24{,}3}{243}$ et $\frac{24{,}3}{243} = \frac{1}{10}$, ce qui montre qu'au bout de 5 ans la valeur est encore supérieure au dixième de la valeur initiale.

Problème 18 : de très grands nombres

p^{50} est le carré de p^{25} .
Quel que soit le dernier chiffre de p^{25} son carré ne peut pas se terminer par le chiffre 3 comme le montre le tableau ci-dessous obtenu en s'appuyant sur la technique usuelle de multiplication :

Dernier chiffre d'un entier	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dernier chiffre du carré de cet entier	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

il n'existe donc aucun nombre entier p tel que $p^{50} = A$

$2^{10} = 1024$ donc $2^{10} > 1000$

Or $2^{50} = 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10}$
On en déduit que $2^{50} > 1000 \times 1000 \times 1000 \times 1000 \times 1000$
soit $2^{50} > 10^{15}$

Or $B < 10^{15}$ donc $B < 2^{50}$

L'inégalité ci-dessus montre que les valeurs de p supérieures ou égales à 2 ne peuvent pas convenir, or p = 0 et p = 1 ne conviennent manifestement pas non plus, donc il n'existe donc aucun nombre entier p tel que $p^{50} = B$

Problème 19 : des triangles avec deux droites

Chacun des points placés étant un sommet d'un et un seul triangle, le nombre de points placés et le nombre total de sommets sont égaux.
Chaque triangle ayant trois sommets, ce nombre est un multiple de 3.
Or 30 + 15 = 35 n'est pas un multiple de 3, il est donc impossible de vérifier la condition avec 20 points sur D et 15 sur D'.

S'il y a 15 points sur D', on peut tracer au maximum 15 triangles puisque chaque triangle a au moins un sommet sur D'.
On peut donc utiliser au maximum 3 x 15 = 45 points comme sommets.

Il n'est donc pas possible de vérifier la condition avec 40 points sur D et 15 sur D' car il est demandé d'utiliser les 55 points et on ne peut pas en utiliser plus de 45.

Considérons maintenant 40 points sur D et 26 points sur D'
Soit a le nombre de triangles ayant deux sommets sur D, b le nombre de triangles ayant un seul sommet sur D.
les nombres a et b doivent respecter les conditions suivantes :
$2a + b = 40$ (qui traduit le fait que tous les points de D sont utilisés)
$2b + a = 26$ (qui traduit le fait que tous les points de D' sont utilisés)
$a + b = 22$ (qui traduit le fait qu'avec 66 sommets on obtient 66 22 triangles)

La première et la troisième égalités permettent de déduire que $a = 18$
La deuxième et la troisième égalités permettent de déduire que $b = 4$

On vérifie que si on trace 18 triangles ayant 2 sommets sur D et 4 triangles ayant un seul sommet sur D on vérifie bien toutes les conditions :
Sur la droite D on utilise $2 \times 18 + 4 = 40$ points.
Sur la droite D' on utilise $18 + 2 \times 4 = 26$ points.

Remarque : on pouvait n'utiliser que deux des trois égalités ci-dessus et résoudre un système classique de deux équations du premier degré à deux inconnues.

Problème 20 : tableur et arithmétique
La feuille ci-dessous a été construite de la façon suivante :
Le nombre 32 est inscrit dans la cellule A1
La formule = A1 + 1 est inscrite en A2 puis recopiée en tirant vers le bas.
La formule = A1 * A1 est inscrite en B1 puis recopiée en tirant vers le bas.
La formule = mod(B1 ; 29) est inscrite en C1 puis recopiée en tirant vers le bas.
La formule = si (C1 = 5 ; «oui» ; «») est inscrite en D1 puis recopiée en tirant vers le bas.

On constate que 5 nombres répondent à tous les critères imposés : 1600, 2209, 4761, 5776, 9604.

D'autres organisations de la feuille de calcul sont évidemment possibles, mais elles doivent conduire aux mêmes résultats.

32	1024	9	
33	1089	16	
34	1156	25	
35	1225	7	
36	1296	20	
37	1369	6	
38	1444	23	
39	1521	13	
40	1600	5	oui
41	1681	28	
42	1764	24	
43	1849	22	
44	1936	22	
45	2025	24	
46	2116	28	
47	2209	5	oui

48	2304	13	
49	2401	23	
50	2500	6	
51	2601	20	
52	2704	7	
53	2809	25	
54	2916	16	
55	3025	9	
56	3136	4	
57	3249	1	
58	3364	0	
59	3481	1	
60	3600	4	
61	3721	9	
62	3844	16	
63	3969	25	
64	4096	7	
65	4225	20	
66	4356	6	
67	4489	23	
68	4624	13	
69	4761	5	oui
70	4900	28	
71	5041	24	
72	5184	22	
73	5329	22	
74	5476	24	
75	5625	28	
76	5776	5	oui
77	5929	13	
78	6084	23	
79	6241	6	
80	6400	20	
81	6561	7	
82	6724	25	
83	6889	16	
84	7056	9	
85	7225	4	
86	7396	1	
87	7569	0	
88	7744	1	
89	7921	4	
90	8100	9	
91	8281	16	
92	8464	25	
93	8649	7	
94	8836	20	
95	9025	6	
96	9216	23	
97	9409	13	
98	9604	5	oui
99	9801	28	