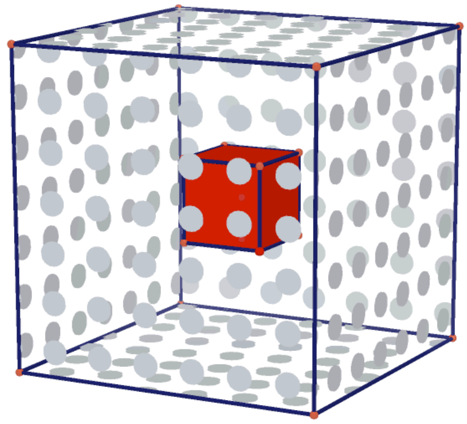
Préparation du CRPE, problèmes du jour, mai-juin 2011 (21 à 30)

Problème 21 : pgcd, ppcm
Un nombre entier A vérifie simultanément les deux affirmations suivantes :
le pgcd de A et 2400 est 150,
le ppcm de A et 2400 est 7200.

Déterminer toutes les valeurs possibles du nombre A.

Problème 22 : masse d'un objet
Un cube de métal de 5 cm d'arête est placé au centre d'un cube d'un matériau isolant comme le montre le dessin.
L'épaisseur d'isolant, mesurée d'une face du cube métallique à la face correspondante du grand cube est de 7,5 cm.



un décimètre cube du métal utilisé a une masse de 8 kg.
un décimètre cube de l'isolant utilisé a une masse de 200 g.
Quelle est la masse de l'ensemble constitué par le cube de métal et l'isolant ?

Problème 23 : multiples de 9 et division euclidienne
Quel est le plus petit nombre entier vérifiant simultanément les trois conditions suivantes ?
Il s'écrit avec 5 chiffres.
Il est multiple de 9.
Son reste dans la division par 8 est 5.

Problème 24 : combien de billes de chaque couleur ?
Dans une boite, il y a des billes de quatre couleurs : rouges jaunes bleues et vertes.
Si on compte toutes les billes sauf les rouges, on en trouve 142.
Si on compte toutes les billes sauf les jaunes, on en trouve 158.
Si on compte toutes les billes sauf les bleues, on en trouve 163.
Si on compte toutes les billes sauf les vertes, on en trouve 137.

Combien y a-t-il de billes de chaque couleur ?

Problème 25 : augmentations en pourcentage.
Le prix d'un objet a augmenté de 10% entre le premier janvier 2003 et le premier janvier 2006.

Le prix de ce même objet a augmenté de 32% du 01/01/2003 au 01/01/2011.

Quelle augmentation (exprimée en pourcentage) a subi le prix de cet objet entre le 01/01/2006 et le 01/01/2011 ?

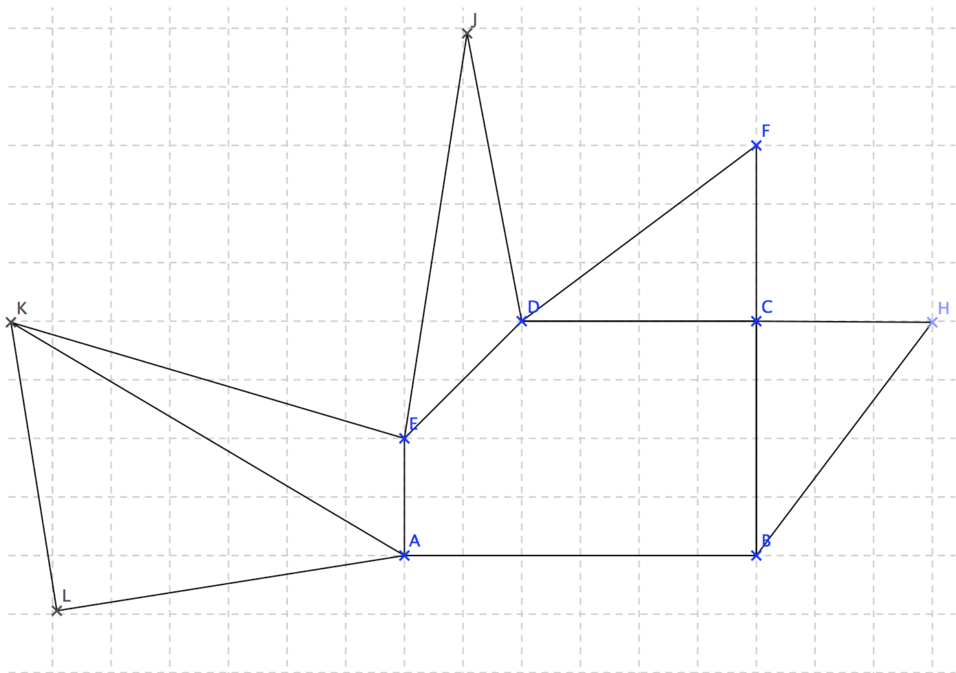
Problème 26 : durées
Une année de 365 jours est partagée en 1800 parties de durées égales, chacune de ces parties étant elle même subdivisée en 48 intervalles de même durée.
Quelles est la durée en (heures minutes et secondes) d'un de ces intervalles.

Problème 27 : géométrie pure et dure
On considère un triangle ABC et le milieu M du côté [BC]
D est le symétrique de A par rapport à C.
E est le symétrique de C par rapport à D.
Par le point D on trace la parallèle à (ME), elle coupe (AM) en un point F.
Les droites (AC) et (BF) se coupent en R.
Démontrer que R est le milieu de [AC].

Problème 28 : durée de vie (Ce problème doit être résolu sans calculatrice)**.**
La vie d'un être humain peut-elle durer plus d'un milliard de secondes ?
Peut-elle durer plus de dix milliards de secondes ?

Problème 29 : décomposition de 7
Est-il possible que le produit de deux nombres décimaux s'écrivant chacun avec deux chiffres après la virgule soit égal à 7.
On répondra en justifiant l'impossibilité ou en produisant deux nombres vérifiant les conditions.
Remarque : bien entendu, on parle de l'écriture usuelle sans zéro inutile, le nombre 7 n'est pas considéré comme un nombre s'écrivant avec deux chiffres après la virgule.
La proposition 7 = 7,00 x 1,00 est amusante mais ne répond pas à la question posée.

Problème 30 : volume d'un solide
Le dessin ci-dessous représente le patron d'un solide.
Calculer le volume de ce solide.
Les carreaux du quadrillage sont supposés avoir des côtés de 1 cm.
Les points A, B, C, D, E, F et H sont situés sur les intersections du quadrillage



Indications

Problème 21 : pgcd, ppcm
On peut envisager d'utiliser les décompositions en facteurs premiers de 2400 150 et 7200.

Pour chaque facteur premier, on cherche ensuite combien il peut y en avoir dans la décomposition de A.

Problème 22 : masse d'un objet
La principale difficulté est de calculer le volume d'isolant.
On peut pour cela découper mentalement l'isolant en plusieurs pavés, mais il est plus simple de calculer le volume du grand cube et d'en soustraire le volume du cube central.

Problème 23 : multiples de 9 et division euclidienne
On peut essayer de traiter simultanément les deux conditions portant sur les divisions par 8 et par 9… mais ce n'est pas très simple.

Il est probablement plus commode de chercher le plus petit nombre de 5 chiffres multiple de 9, sans tenir compte de la division par 8.
On cherche ensuite les multiples de 9 qui suivent celui qu'on vient de trouver jusqu'à en trouver un dont le reste dans la division par 8 convienne.

On peut évidemment faire aussi l'inverse : chercher le plus petit nombre de 5 chiffres ayant pour reste 5 dans la division par 8.
On cherche ensuite parmi les nombres qui suivent ceux qui ont le même reste dans la division par 8.
Parmi ceux ci, le premier qui est divisible par 9 est le nombre cherché.

Problème 24 : combien de billes de chaque couleur ?
Le rapprochement de deux des quatre informations fournies permet de déduire une nouvelle information du type « il y a 13 billes bleues de plus que de billes jaunes» si vous traites les données par l'arithmétique ou bien du type «$b = j + 13$» si vous traitez le problème algébriquement (bien entendu cet exemple est faux).

En réintroduisant deux informations de ce type dans une des égalités fournies, on obtient une information concernant les billes d'une seule couleur.

On peut aussi essayer d'obtenir le nombre total de billes. Il est plus difficile de trouver la façon d'y parvenir que d'appliquer la méthode précédente, cependant on est récompensé par une solution rapide et élégante.

Problème 25 : augmentations en pourcentage.
Comme pour tous les problème où on combine des évolutions successives exprimées en pourcentage, il est commode de traduire ces évolutions en pourcentage par une multiplication.

Par exemple, augmenter de 50% c'est multiplier par 1,5

Diminuer de 15 %, c'est multiplier par 0,85   (et non diviser par 1,15)

Si un prix P augmente de 50 % puis diminue de 15 %, il deviendra P x 1,5 x 0,85 soit P x 1,275 ce qui correspond à une augmentation de 12,75%

Problème 26 : durées
Ne pas se précipiter à effectuer les opérations.

Problème 27 : géométrie pure et dure
Il existe dans la figure une configuration de Thalès qui peut être bien utile.

Problème 29 : décomposition de 7
L'écriture à virgule d'un nombre décimal est une autre façon de coder une fraction décimale.
Par exemple $3,7 = \frac{37}{10}$ ou $1,56 = \frac{156}{100}$
L'écriture sous forme de fraction décimale favorise le raisonnement dans ce problème.

Problème 30 : volume d'un solide
Le solide est une pyramide dont la hauteur est confondue avec une arête.

Solutions

Problème 21 : pgcd, ppcm

2400 = 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 3 x 5 x 5
150 = 2 x 3 x 5 x 5
7200 = 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 5 x 5

Le nombre A est un diviseur de 7200, sa décomposition en facteurs premiers ne comprend donc que des facteurs égaux 2, 3 ou 5.
Pour chacun de ces facteurs, voyons combien il y en a dans la décomposition de A

Il y a un facteur 2 en effet, s'il n'y en avait pas, il n'y en aurait pas non plus dans le pgcd. s'il y en avait plus d'un, il y en aurait plus d'un dans le pgcd puisqu'il y en a cinq dans 2400.

Il y a deux facteurs 3 car il y en a deux dans le ppcm alors qu'il y en a un seul dans 2400.

Il y a deux facteurs 5 puisqu'il y en a deux à la fois dans le pgcd et le ppcm.

On en conclut qu'il y a une seule valeur possible pour le nombre A :

A = 2 x 3 x 3 x 5 x 5 = 450

Problème 22 : masse d'un objet

L'arête du cube central mesure $\frac{1}{2}dm$ son volume est donc $\frac{1}{8}dm^3$ et sa masse de 1 kg.

L'arête du grand cube mesure $5cm + 2\times 7{,}5cm$ soit $20cm$ ou $2dm$.

Son volume est donc de $8dm^3$.

Le volume d'isolant est donc égal à $\left(8-\frac{1}{8}\right)dm^3$,

ce qui correspond à une masse de 1600g - 25 g = 1575 g.

La masse de l'ensemble est donc de 2575g.

Problème 23 : multiples de 9 et division euclidienne

Le plus petit nombre entier qui s'écrit avec 5 chiffres est 10 000.
10 000 = 2500 x 8, le plus petit entier de 5 chiffres ayant pour reste 5 dans la division par 8 est donc 2500 x 8 + 5 soit 10 005.
Ce nombre n'est pas multiple de 9 car la somme de ses chiffres est égale à 6.

Si on ajoute 8 plusieurs fois de suite à 10 005, on obtiendra des nombres dont les restes dans la division par 8 seront tous égaux à 5.
Nous allons écrire ces nombres dans l'ordre croissant, et voir pour chacun d'entre eux s'il est multiple de 9.
Le premier multiple de 9 que nous rencontrerons est la solution du problème.

10 013   10 021   10 029   10 037   10 045 ne sont pas multiples de 9

En revanche 10 053 est multiple de 9, c'est le nombre cherché.

Problème 24 : combien de billes de chaque couleur ?
Soit r le nombre de billes rouges, b le nombre de billes bleues…etc.

$$\begin{aligned} j + b + v &= 142 \\ r + b + v &= 158 \\ r + j + v &= 163 \\ r + j + b &= 137 \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre ces égalités, on obtient
$3r + 3j + 3b + 3v = 600$, d'où on déduit que $r + j + b + v = 200$

en comparant cette somme à chacune des sommes partielles fournies on déduit successivement qu'il y a 58 billes rouges, 42 jaunes, 37 bleues et 63 vertes.

Autre méthode :
$j + b + v = 142$ donc $b + v = 142 - j$
$r + b + v = 158$ donc $b + v = 158 - r$

On en déduit que $142 - j = 158 - r$ donc que $r = j + 16$

Remarques :
On peut obtenir la même chose en soustrayant membre à membre les deux égalités.
Si on ne veut pas s'appuyer sur les écritures algébriques, on peut aussi parvenir à la même conclusion ainsi : Il y a 142 billes en comptant les jaunes, les bleues et les vertes. Si on enlève les jaunes et rajoute les rouges, il y en a 158. Il y a donc 16 billes rouges de plus que de billes jaunes.

On peut ensuite déterminer de la même façon que $j = b + 5$

en remplaçant dans l'égalité $r + j + b = 137$ b par $j - 5$ et r par $j + 16$ on obtient
$j + 16 + j + j - 5 = 137$ d'où $3j + 11 = 137$; $3j = 126$; $j = 42$.

Les autres nombres de billes s'en déduisent alors aisément.

Problème 25 : augmentations en pourcentage.
Le prix a été multiplié par 1,1 entre 2003 et 2006, et par 1,32 entre 2003 et 2011.
soit a le nombre par lequel le prix a été multiplié entre 2006 et 2011, on a donc :
$1{,}1\,a = 1{,}32$ d'où $a = 1{,}32 / 1{,}1 = 1{,}2$
Du premier janvier 2006 au premier janvier 2011, le prix a été multiplié par 1,2 ce qui correspond à une augmentation de 20%.

Problème 26 : durées
La durée de l'année en secondes et $365 \times 24 \times 3600$.
On peut aussi l'écrire $365 \times 24 \times 2 \times 1800$, ou bien $365 \times 48 \times 1800$
Si l'année est partagée en 1800 parties égales, chaque partie durera donc 365×48 secondes.
Si une de ces parties est partagée en 48 intervalles égaux, chaque intervalle dure 365 secondes soit 6 minutes et 5 secondes.

Problème 27 : géométrie pure et dure

D est le symétrique de A par rapport à C et E est le symétrique de C par rapport à D donc A, C, D et E sont alignés dans cet ordre et AC = CD = DE. il en résulte que $\frac{AD}{AE} = \frac{2}{3}$.

Dans le triangle AME, le point F est situé sur [AM], D est situé sur [AE] et (DF) est parallèle à (ME). Le théorème de Thalès permet donc d'affirmer que $\frac{AF}{AM} = \frac{AD}{AE}$, or $\frac{AD}{AE} = \frac{2}{3}$, par conséquent $\frac{AF}{AM} = \frac{2}{3}$.

Dans le triangle ABC, M est le milieu de [BC] donc [AM] est la médiane issue de A.
Le point F, situé sur cette médiane aux deux tiers de sa longueur à partir du sommet est donc le centre de gravité de ABC.

La droite (BF) passe par le sommet B du triangle ABC et par son centre de gravité F, c'est donc la médiane issue de B. Par conséquent, elle coupe le côté [AC] en son milieu, R est donc le milieu de [AC].

Problème 28 : durée de vie

Un an, c'est 365 x 24 x 3600 secondes.
C'est donc plus que 300 x 20 x 3000 secondes, soit 18 000 000 de secondes.
Or, 56 x 18 000 000 = 1 008 000 000.
On en conclut qu'il faut moins de 56 ans pour un milliard de secondes, une vie humaine peut donc durer plus d'un milliard de secondes.

Un an, c'est moins de 400 x 25 x 4000 secondes, c'est moins de 40 000 000 de secondes.
Or 40 000 000 x 250 = 10 000 000 000.
Il faut donc plus de 250 ans pour dix milliards de secondes, une vie humaine ne peut donc pas durer plus de dix milliards de secondes.

On a choisi dans cette solution de raisonner sur des inégalités.
Cette méthode conduit à une rédaction qui peut paraître un peu compliquée mais permet en revanche de s'appuyer sur des calculs simples. 18 000 000 s et 40 000 000 s sont des valeurs très grossières de la durée d'une année, mais comme on affirme seulement que la durée réelle est comprise entre ces deux valeurs, ça n'a pas d'importance.

Problème 29 : décomposition de 7

considérons deux nombres A et B qui s'écrivent avec deux chiffres après la virgule.
On a donc A = $\frac{a}{100}$ et B = $\frac{b}{100}$, a et b étant des entiers qui ne sont pas multiples de 10 (sinon les nombres A et B pourraient s'écrire avec un seul chiffre après la virgule ou seraient entiers).

Comme on doit avoir AB = 7, on en déduit que $\frac{a}{100} \times \frac{b}{100} = 7$ puis que $ab = 70000 = 7 \times 2^4 \times 5^4$

En utilisant cette décomposition en facteurs premiers de *ab*, on peut donner différentes valeurs à *a* et à *b*, mais pour que *a* et *b* ne soient pas des multiples de 10 l'un des deux nombres doit contenir tous les facteurs «2» l'autre tous les facteurs «5»

On a donc les deux possibilités suivantes :
l'un des deux nombres *a* et *b* vaut $7 \times 2^4 = 112$ et l'autre $5^4 = 625$
l'un des deux nombres *a* et *b* vaut $2^4 = 16$ et l'autre $7 \times 5^4 = 4375$

Ce qui conduit aux produits suivants : $1{,}12 \times 6{,}25 = 7$ $0{,}16 \times 43{,}75 = 7$

Problème 30 : volume d'un solide
Le solide est une pyramide dont le polygone ABCDE est la base et donc la hauteur est confondue avec l'arête CH.

La base est obtenue en enlevant du rectangle donc AB et C sont des sommets un triangle rectangle.
L'aire de la base mesure 6 x 4 - (2 x 2) : 2 soit 22 cm².

La hauteur mesure 3 cm.

Le volume de la pyramide, calculé à l'aide de la formule (base x hauteur) : 3 mesure donc 22 cm³.