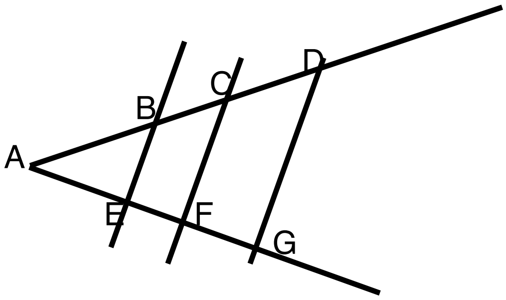
Préparation du CRPE, problèmes du jour, mai-juin 2011 (31 à 40)

Problème 31 : longueurs dans un parallélogramme
On considère un parallélogramme ABCD, de centre O, tel que AB = 2BC.
La perpendiculaire à (AB) passant par A coupe (DC) en H.
La perpendiculaire à (BC) passant par O coupe (BC) en J.

Démontrer que AH = OJ.

Problème 32 : Thalès, Thalès et Thalès
A, B, C et D sont quatre points alignés.
A, E, F et G sont également alignés.
Les droites (BE), (CF) et (DG) sont parallèles.
AE = 4 cm, BD = 9 cm, BE = 5 cm, CF = 8 cm, et DG = 12 cm.
Calculer les longueurs AB et FG



La figure fournie ci-contre à titre indicatif ne respecte pas les dimensions.

Problème 33 : nombre de chiffres
A est un nombre entier positif qui s'écrit avec 4 chiffres.
B est un nombre entier positif qui s'écrit avec 2 chiffres.
C est un nombre entier positif qui s'écrit avec 3 chiffres.

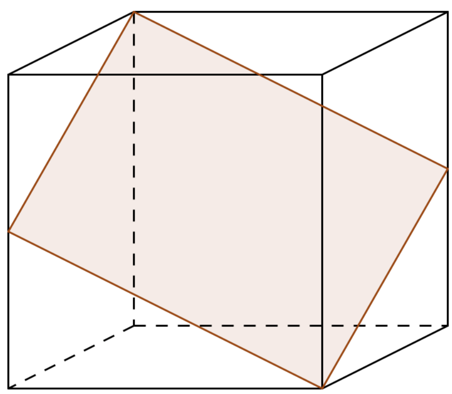
Que peut-on dire du nombre de chiffres avec lesquels s'écrit A + B - C ?

Problème 34 : un multiple de 27
Un nombre entier X s'écrit avec 4 chiffres.
Le chiffre des milliers de X est égal à son chiffre des dizaines.
Le chiffre des centaines de X est égal à son chiffre des unités.
On sait de plus que X est multiple de 27.

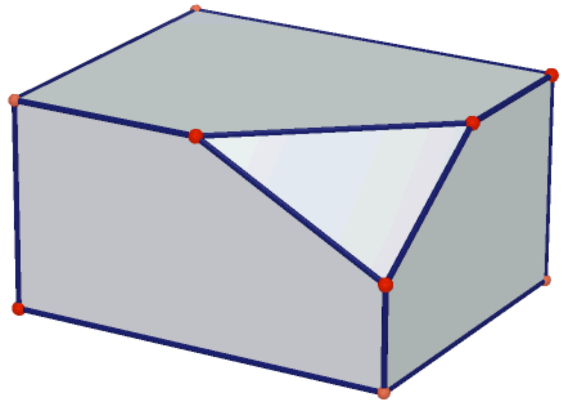
Quelles sont les valeurs possibles de X ?

Problème 35 : quadrilatère dans un cube
On trace sur les faces d'un cube de 6 cm d'arêtes un quadrilatère.
Deux sommets du quadrilatère sont des sommets opposés du cube.
Les deux autres sommets sont les milieux de deux arêtes du cube comme l'indique le dessin.
On admettra que ce quadrilatère est plan.

Dessiner en vraie grandeur ce quadrilatère.



Problème 36 : volume d'une partie d'un pavé



On coupe un pavé droit par un plan passant par les milieux de trois arêtes concourantes comme indiqué sur le schéma.
On appelle V le volume du pavé initial, v le volume du solide restant.

Calculer le rapport $\frac{v}{V}$.

Problème 37 : un ruban découpé (à résoudre sans calculatrice)

Une machine découpe un long ruban dont la longueur totale est $\frac{10253}{3} cm$ en petits morceaux de longueur $\left(3+\frac{1}{7}\right)cm$.

Combien de morceaux seront obtenus ?

Problème 38 : encore des bandes
En mettant bout à bout des bandes de 37 cm de longueur et d'autres bandes de 23 cm de longueur, est-il possible d'obtenir une bande dont la longueur totale est égale à 8 mètres ?

On répondra en justifiant l'impossibilité ou en fournissant toutes les façons possibles d'obtenir la bande de 8 m.

Problème 39 : toujours des bandes
Montrer comment il est possible de résoudre le problème n° 38 à l'aide d'un tableur.

Problème 40 : angle dans et hors du triangle
On considère un triangle ABC et un point P. Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ? La réponse doit évidemment être justifiée.

Affirmation 1 :

Si P est à l'intérieur du triangle, alors $\widehat{APB} > \widehat{ACB}$

Affirmation 2 :

Si P est à l'extérieur du triangle, alors $\widehat{APB} < \widehat{ACB}$

Indications

Problème 31 : longueurs dans un parallélogramme
On peut faire intervenir l'aire du parallélogramme.

Problème 32 : Thalès, Thalès et Thalès
Envisager toutes les configurations dans lesquelles on peut utiliser le théorème de Thalès.

Le théorème de Thalès appliqué aux triangles donne des égalités entre des rapports de longueurs. Les longueurs utilisées pour ces rapports sont les longueurs des côtés des triangles.

[FG] n'étant pas un côté de triangle, dans aucune des trois configurations possibles, la longueur FG n'intervient pas dans les rapports égaux. Il en est de même pour la longueur BD.

Problème 33 : nombre de chiffres
12 - 9 = 3   37 - 2 = 35.
Ces exemples montrent qu'en soustrayant un entier à un seul chiffre d'un entier de 2 chiffres, le résultat peut s'écrire avec un ou deux chiffres.
De la même façon, pour chaque question posée il y a probablement plusieurs possibilités.

Une façon simple de répondre consiste à calculer la plus grande valeur possible et la plus petite valeur possible du nombre demandé.

Problème 34 : un multiple de 27
27 = 3 x 9
X étant multiple de 27 il est multiple de 9.
On peut donc commencer par chercher tous les multiples de 9 qui respectent la contrainte sur les chiffres puis trier parmi eux ceux qui sont multiples de 27.

Problème 35 : quadrilatère dans un cube
Chacun des côtés du quadrilatère joint un sommet d'une face au milieu d'un côté de la même face.
Cette remarque montre que les quatre côtés sont égaux et fournit une façon de les construire.

On peut construire par ailleurs en vrai grandeur une des diagonales du quadrilatère.

Problème 36 : volume d'une partie d'un pavé
La partie enlevée est une pyramide dont le volume est facile à calculer.
Cette pyramide est un tétraèdre (toutes ses faces sont des triangles), chaque face peut donc être choisie comme base.

Problème 37 : un ruban découpé
Eviter de passer par des valeurs décimales approchées car il est alors difficile de conclure rigoureusement sur le nombre exact de morceaux.

Il est possible d'effectuer le calcul directement avec les fractions.

Il est probablement plus judicieux de changer d'unité de longueur afin de pouvoir travailler avec des nombres entiers. Il suffit alors de poser une division euclidienne.

Problème 38 : encore des bandes
Il est difficile de ne pas procéder par tâtonnement, il faut tenter de s'organiser pour que le tâtonnement ne soit pas trop fastidieux.

On peut éviter presque tout tâtonnement si on forme autant que possible des groupements d'une bande de chaque sorte…mais il s'agit là d'une astuce de calcul peu généralisable.

Problème 39 : toujours des bandes
calculer par une formule la longueur totale de x bandes de 23 cm et y bandes de 37 cm.
Pour plus de lisibilité, on peut faire afficher le résultat seulement quand il est égal à 800 et laisser la cellule vide dans les autres cas.

Problème 40 : angle dans et hors du triangle
On peut s'appuyer sur la comparaison des autres angles des triangles ABC et ABP
On peut aussi s'intéresser au cas limite où le point P est situé sur le triangle.

Solutions

Problème 31 : longueurs dans un parallélogramme
Un triangle est partagé par une de ses médianes en deux triangles d'aires égales, il en résulte qu'un parallélogramme est partagé par ses diagonales en quatre triangles d'aires égales.

L'aire du parallélogramme est égale à $AB \times AH$

L'aire du triangle AOC est égale $\dfrac{BC \times OJ}{2}$

on a donc $AB \times AH = 4\dfrac{BC \times OJ}{2}$ or AB = 2 BC,

on en déduit que $2\,BC \times AH = 2\,BC \times OJ$ d'où BC = OJ

Problème 32 : Thalès, Thalès et Thalès
Dans le triangle ADG, le point B est sur [AD], le point E est sur [AG] et (BE) est parallèle à (DG).
Le théorème de Thalès permet alors d'affirmer que $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AE}{AG} = \dfrac{BE}{DG}$.

On en déduit que $\dfrac{AB}{AB+9} = \dfrac{5}{12}$ puis :

$12AB = 5(AB+9)$

$12AB = 5AB + 45$

$7AB = 45$

$AB = \dfrac{45}{7}$

Par ailleurs on déduit des mêmes égalités de rapports que :

$\dfrac{4}{AG} = \dfrac{5}{12}$

$5AG = 48$

$AG = \dfrac{48}{5}$

Dans le triangle ACF, le point B est sur [AC], le point E est sur [AF] et (BE) est parallèle à (CF).
Le théorème de Thalès permet alors d'affirmer que : $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{BE}{CF}$

On en déduit que :

$\dfrac{4}{AF} = \dfrac{5}{8}$

$5AF = 32$

$AF = \dfrac{32}{5}$

F étant situé sur [AG], $FG = AG - AF = \dfrac{48}{5} - \dfrac{32}{5} = \dfrac{16}{5}$

Problème 33 : nombre de chiffres
A s'écrivant avec 4 chiffres, les valeurs possibles de A vont de 1000 à 9999
Les valeurs possibles de B vont de 10 à 99 et les valeurs de C de 100 à 999

La plus grande valeur possible de A + B - C est 9999 + 99 - 100 = 9998
La plus petite valeur possible de A + B - C est 1000 + 10 - 999 = 11

Le nombre A + B - C peut s'écrire avec 4 chiffres, il peut aussi s'écrire avec deux chiffres.
Il semble raisonnable de penser qu'il peut aussi s'écrire avec trois chiffres.
Pour le prouver, il suffit de fournir un exemple s'écrivant avec trois chiffres : 1000 + 10 - 100 = 910

Le nombre A + B + C peut donc s'écrire avec 2, 3 ou 4 chiffres selon les valeurs de A B et C

Problème 34 : un multiple de 27
Pour respecter les contraintes indiquées sur les chiffres, X s'écrire $\overline{abab}$

27 = 3 x 9 par conséquent X, qui est multiple de 27, est également multiple de 9.
La somme des chiffres de X est donc un multiple de 9
$2(a+b)$ est multiple de 9 ce qui revient à dire que $a + b$ est multiple de 9

Les valeurs de X respectant cette condition sont
1818 2727 3636 4545 5454 6363 7272 8181 et 9090 (cas où $a + b = 9$)
ainsi que 9999 (cas où $a + b = 18$)

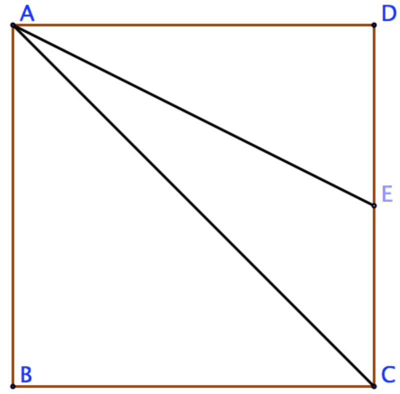
En divisant chacun de ces nombres par 9, on peut aboutir à deux situations :
Le quotient est multiple de 3, alors X est multiple de 27, c'est une des solutions du problème.
Le quotient n'est pas multiple de 3, alors X n'est pas multiple de 27

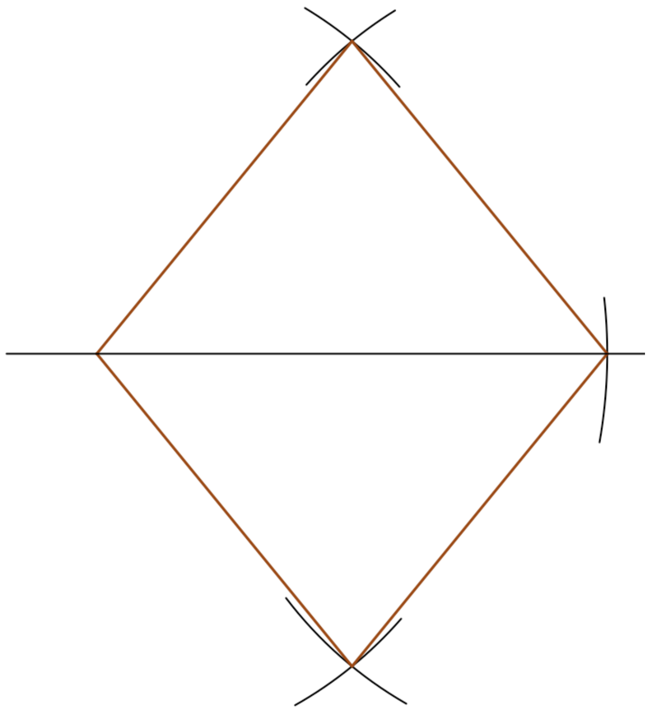
1818 = 9 x 202 ne convient pas
2727 = 9 x 303 = 27 x 101 convient
3636 = 9 x 404 ne convient pas
4545 = 9 x 404 ne convient pas
5454 = 9 x 606 = 27 x 202 convient
6363 = 9 x 707 ne convient pas
7272 = 9 x 808 ne convient pas
8181 = 9 x 909 = 27 x 303 convient
9090 = 9 x 1010 ne convient pas
9999 = 9 x 1111 ne convient pas

Les valeurs possibles du nombre X sont donc 2727 5454 et 8181

Problème 35 : quadrilatère dans un cube
Pour construire le quadrilatère demandé, nous avons d'abord construit un carré de 6 cm d'arête (superposable à une des faces du cube). Le segment [AE] a la même longueur que les côtés du quadrilatère demandé.
Le segment [AC] à la même longueur qu'une des diagonales de ce quadrilatère *(pour vous en convaincre, pensez au carré «horizontal» obtenu en joignant les milieux des arêtes «verticales» sur le cube de l'énoncé).*

La construction du quadrilatère (à droite) résulte du report au compas des longueurs déterminées à l'aide du carré.





Problème 36 : volume d'une partie d'un pavé
Soient *a* *b* et *c* les mesures des arêtes du pavé.
Une des faces de la pyramide est un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent *a* et *b*, nous utiliserons cette face comme base.

L'aire de la base mesure alors $\frac{ab}{8}$

Le volume de la pyramide mesure $\frac{\frac{ab}{8} \times \frac{c}{2}}{3}$ soit $\frac{abc}{48}$

Le volume de la pyramide mesure $\frac{1}{48}$ du pavé, la partie restante mesure donc $\frac{47}{48}$ ce qui revient à dire que $\frac{v}{V} = \frac{47}{48}$

Problème 37 : un ruban découpé
Utilisons comme unité de longueur la vingt-et-unième partie du centimètre.

$\frac{10253}{3} = \frac{71771}{21}$, la longueur totale du ruban mesure donc 71771 dans la nouvelle unité.

$3+\frac{1}{7} = \frac{66}{21}$, la longueur de chacun des morceaux mesure donc 66 dans la nouvelle unité.

La division euclidienne de 71771 par 66 a pour quotient 1087 et pour reste 29, la machine découpera donc 1087 morceaux.

Problème 38 : encore des bandes

Soit n le nombre de bandes de la catégorie la moins nombreuse.

Trois cas sont possibles :

Il y a n bandes de chaque sorte

Il y a n bandes de 23 cm et n + x bandes de 37 cm. (x étant non nul)

Il y a n bandes de 37 cm et n + y bandes de 23 cm. (y non nul)

Le premier cas conduit à une longueur totale de n (37 + 23) or 800 n'est pas multiple de 60, il n'y a donc aucune solution de ce type.

Le deuxième cas se traduit à $60\ n + 37x = 800$

800 et 60 n sont des multiples de 20, 37x l' est donc aussi, et comme 37 est premier, x est multiple de 20.

Si $x = 20$, on a alors $60\ n + 740 = 800$, soit $n = 1$

Il est donc possible d'obtenir une longueur totale de 8 mètres à l'aide d'une bande de 23 cm et 21 bandes de 37 cm.

Les autres valeurs de x ne conviennent pas car 40 x 37 = 1480 est déjà trop grand.

Le troisième cas se traduit à $60\ n + 23y = 800$

800 et 60 n sont des multiples de 20, 23y l' est donc aussi, y est donc multiple de 20.

Si $y = 20$, on a alors $60\ n + 460 = 800$, équation qui n'a pas de solution entière

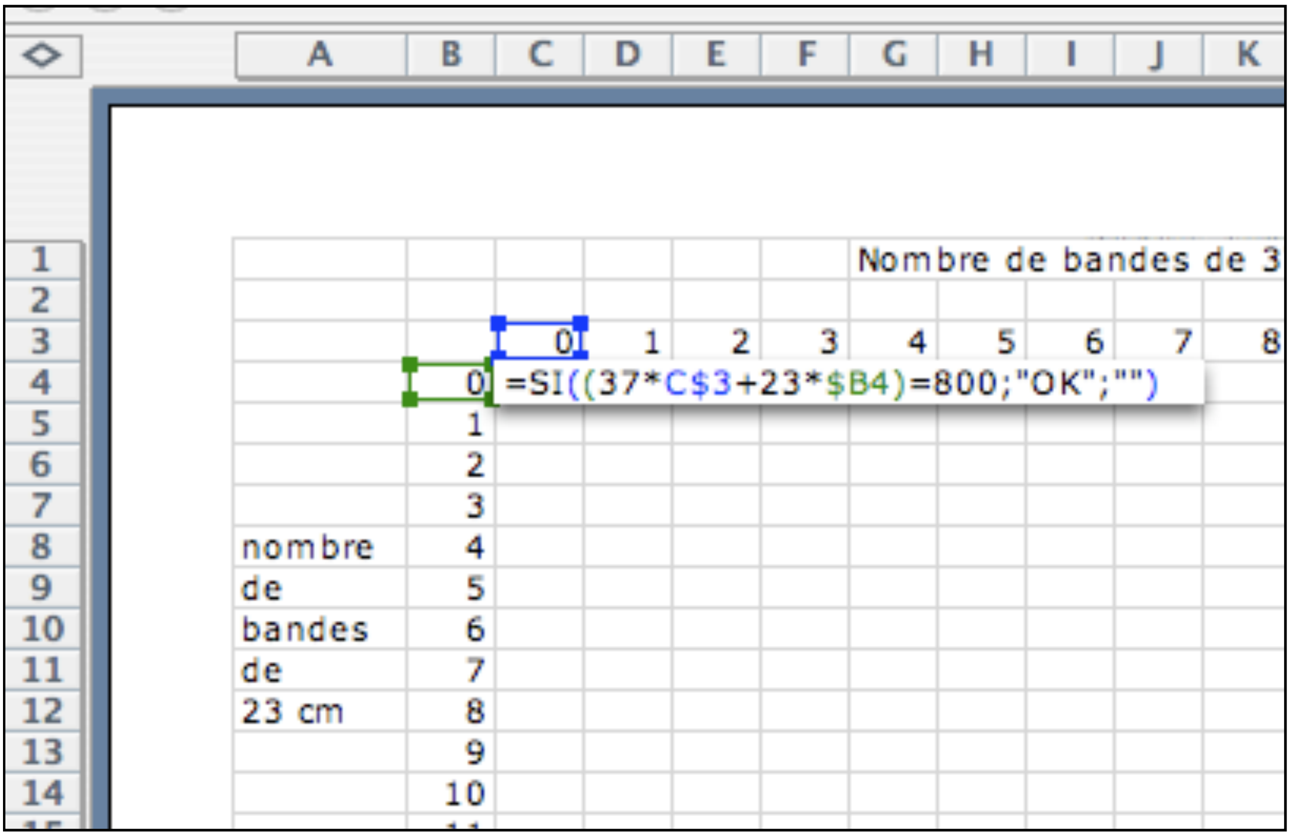
Les autres valeurs de y ne conviennent pas car 40 x 23 = 920 est déjà trop grand.

Il y a donc une seule façon d'obtenir une bande de 8 m, celle indiqué dans le deuxième cas.

Problème 39 : toujours des bandes

La copie d'écran ci-dessous montre une façon de parvenir au résultat.

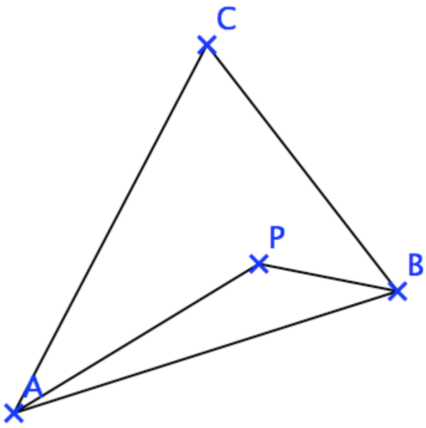
La formule inscrite dans la cellule C4 est recopiée en tirant vers le bas et vers la droite.



Pour que la feuille soit concluante, il faut l'étendre jusqu'à 21 bandes de 37 cm et 34 bandes de 23 centimètres afin que toutes les possibilités soient prises en compte.
Il n'est pas nécessaire d'aller au delà puisque 22 x 37 = 814 et 35 x 23 = 805.

L'observation de la feuille complète confirme alors le résultat trouvé pour le problème 38 :
la seule façon d'obtenir une bande de 8 mètres utilise 21 bandes de 37 cm et une de 23 cm.

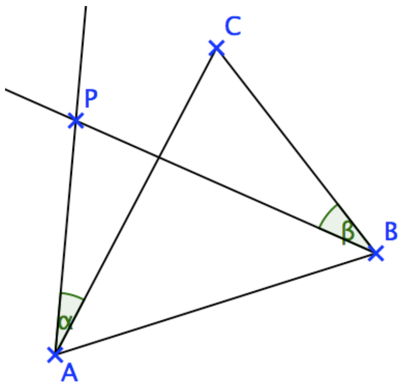
Problème 40 : angle dans et hors du triangle



La somme des angles d'un triangle est égale à 180°
Si on compare deux à deux les angles des triangles ABC et ABP, on constate que l'angle de sommet A est plus petit dans ABP que dans ABC. Il en est de même pour l'angle de sommet B.
La somme des angles étant la même pour chaque triangle, on a nécessairement $\widehat{APB} > \widehat{ACB}$, l'affirmation 1 est donc vraie.

Si on considère le point P', symétrique de P par rapport à (AB), on a $\widehat{AP'B} = \widehat{APB}$ et donc $\widehat{AP'B} > \widehat{ACB}$.
L'affirmation 2 est donc fausse.

Remarque : l'affirmation 2 est fausse même si on place le point P dans le demi plan limité par (AB) et contenant C. Montrons le (ce qui n'était pas imposé par l'énoncé).



Dans la disposition du schéma ci-contre, calculons la mesure de l'angle de sommet P du triangle ABP.

$$\begin{aligned}
\widehat{BPA} &= 180° - \widehat{PAB} - \widehat{PBA} \\
\widehat{BPA} &= 180° - \left(\widehat{CAB} + \alpha\right) - \left(\widehat{CBA} - \beta\right) \\
\widehat{BPA} &= 180° - \widehat{CAB} - \alpha - \widehat{CBA} + \beta \\
\widehat{BPA} &= 180° - \widehat{CAB} - \widehat{CBA} \quad + \beta - \alpha \\
\widehat{BPA} &= \widehat{ACB} \quad + \beta - \alpha
\end{aligned}$$

Si on choisit les angles α et β tels que $\beta > \alpha$, $\beta - \alpha$ est positif et $\widehat{APB} \quad > \quad \widehat{ACB}$

Une version moins formelle du même raisonnement :
Imaginons que le point P est d'abord situé sur C et qu'on fasse pivoter successivement les deux demi droites [AP) (autour de A) puis [BP) (autour de B) pour que P arrive à la position du schéma. Le premier déplacement augmente l'angle de sommet A d'une valeur égale à α sans modifier l'angle de sommet B. La somme des trois angles de ABP étant constante, l'angle de sommet P diminue donc de α .

Le deuxième déplacement augmente de la même façon l'angle de sommet P d'une valeur β .

Si $\beta > \alpha$, le résultat de ces deux modifications est une augmentation de l'angle.