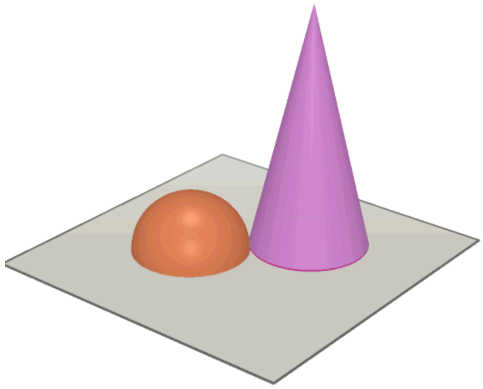
Préparation du CRPE, problèmes du jour, juin-juillet 2011 (41 à 50)

Problème 41 : reste dans la division par 9
Si le nombre entier A augmente de 100, son reste dans la division euclidienne par 9 diminue.
De combien ?

Problème 42 : vitesse de deux cyclistes
Deux cyclistes se déplacent sur des pistes circulaires concentriques.
La piste intérieure a un rayon de 40 m. La piste extérieure un rayon de 50 m.
Les deux cyclistes se déplacent à vitesse constante.
La vitesse du cycliste de la piste intérieure est de 24 km/h.
Pendant que le cycliste de la piste intérieure effectue 8 tours, celui de la piste extérieure en effectue 6, à quelle vitesse roule ce dernier ?

Problème 43 : hauteur d'un cône
Le le cône de cette illustration a un volume double de celui de la demi boule.
La base du cône a le même rayon r que la boule.
Exprimer la hauteur du cône en fonction de r.



Rappel : le volume d'une boule de rayon r est donné par la formule suivante : $V = \frac{4}{3}\pi \times r^3$

Problème 44 : combien de nombres…
Combien y a-t-il de nombres entiers positifs répondant simultanément aux deux critères qui suivent ?

- le nombre s'écrit avec 3 chiffres.
- le carré du nombre s'écrit avec 5 chiffres.

Problème 45 : construction d'un triangle
Un segment [AB] étant tracé arbitrairement, construire en utilisant exclusivement la règle et le compas un triangle ABC dont l'angle de sommet A mesure 60° et l'angle de sommet B 75° .

Problème 46 : débit d'une pompe
On remplit une cuve vide au départ en pompant simultanément dans deux autres cuves.
L'une de ces deux cuves contient au départ 1600 litres, la pompe qui la vide a un débit de 10 litres par minute.
L'autre cuve contient au départ 2000 litres.

On constate au bout d'un certain temps que les trois cuves contiennent exactement la même quantité de liquide.

Quel est le débit de la pompe qui vide la cuve de 2000 litres ?

Problème 47 : Programme de construction
Ecrire un programme de la construction proposée comme solution du problème 45, et justifier cette construction (ce qui revient à prouver que dans le triangle ABC, l'angle de sommet A mesure 60° et l'angle de sommet B mesure 75°).

Problème 48 : division euclidienne.
Les nombres entiers A et B sont tels que A = B + 100.
De plus, la division euclidienne de A par 9 et celle de B par 5 ont le même quotient et le même reste.
Indiquer toutes les valeurs possibles de A et de B.

Problème 49 : carrés se terminant par 26
Y a-t-il des nombres entiers dont le carré se termine par 26 ?

Problème 50 : feu le CRPE
En 2011, il y avait 120 postes ouverts au CRPE dans les Pays de la Loire.

Dans les années à venir, ce nombre diminuera d'un tiers chaque année (le nombre étant arrondi à l'entier inférieur à chaque fois que la règle du tiers ne conduit pas à un résultat entier).

A partir de quelle année n'y aura-t-il plus aucun poste à ce concours ?

Indications

Problème 41 : reste dans la division par 9
On peut faire des essais à partir de diverses valeurs pour A afin de comprendre le phénomène, ou bien travailler directement à partir de l'égalité caractéristique de la division euclidienne de A par 9.

Problème 42 : vitesse de deux cyclistes
On peut évidemment calculer la durée du trajet à partir de ce qu'on sait pour le cycliste de la piste intérieure puis utiliser cette durée pour calculer la vitesse de l'autre cycliste, mais ce n'est pas indispensable.

La durée du trajet étant la même pour les deux cyclistes, la vitesse est proportionnelle à la distance parcourue.
On peut donc chercher d'abord le rapport entre les distances parcourues et multiplier la vitesse du premier cycliste par ce rapport.

Problème 44 : combien de nombres…
Une possibilité est de chercher le plus petit et le plus grand des nombres en questions.

Problème 45 : construction d'un triangle
On sait construire au compas les angles de 60° (en traçant un triangle équilatéral) 90° (à l'aide d'une perpendiculaire) et 45° (grâce à un triangle rectangle isocèle).

On peut ensuite combiner ces angles entre eux ou tracer des bissectrices pour obtenir des angles deux fois plus petits.

En combinant ces idées, il existe de nombreuses façons d'obtenir un angle de 75°.

Problème 46 : débit d'une pompe
Il est facile de déterminer la quantité de liquide dans chaque cuve à l'instant où elles contiennent autant.
On pourra en déduire le temps écoulé en utilisant la cuve qui se vide à un débit connu.

En étant astucieux, on peut même se dispenser de calculer le temps écoulé.

Problème 48 : division euclidienne.
L'égalité caractéristique de la division euclidienne est probablement l'outil le plus efficace.

Problème 50 : feu le CRPE
A cause des éventuels arrondis, il est difficile d'éviter le calcul étape par étape.

Solutions

Problème 41 : reste dans la division par 9
soient q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de A par 9

A = 9q + r et r < 9

A + 100 = 9q + r + 100 = 9q + 9 x 11 + 1 + r = 9 (q + 11) + r + 1

On doit distinguer deux cas :

si r < 8, alors r + 1 < 9, l'égalité A + 100 = 9 (q + 11) + r + 1 caractérise la division euclidienne de A+100 par 9, on constate que le reste a augmenté de 1

si r = 8, alors r + 1 = 9 et on a A + 100 = 9 (q + 12) le reste de la division de A+100 par 9 est alors égal à 0, il a diminué de 8 par rapport au reste de la division de A par 9.

Si le reste de la division de A par 9 diminue quand A augmente de 100, il diminue donc de 8.

Problème 42 : vitesse de deux cyclistes
La distance De parcourue par le cycliste de la piste extérieure est égale à $6 \times 2\pi \times 50$.
La distance Di parcourue par le cycliste de la piste intérieure est égale à $8 \times 2\pi \times 40$.
On a donc $\frac{De}{Di} = \frac{6 \times 2\pi \times 50}{8 \times 2\pi \times 40} = \frac{15}{16}$
La distance parcourue étant proportionnelle à la vitesse, en notant Ve et Vi les vitesses des deux cyclistes on a $\frac{Ve}{Vi} = \frac{15}{16}$ soit $Ve = \frac{15}{16} Vi = \frac{15 \times 24}{16} = 22{,}5$
La vitesse du cycliste circulant sur la piste extérieure est de 22,5 km/h.

Problème 43 : hauteur d'un cône
Soit h la hauteur du cône, son volume est égal à $\frac{\pi r^2 h}{3}$
Le volume du cône étant le double de celui de la demi-boule, il est égal à celui de la boule entière soit $\frac{4}{3}\pi \times r^3$
On a donc $\frac{4}{3}\pi \times r^3 = \frac{\pi r^2 h}{3}$ d'où $h = 4r$

Problème 44 : combien de nombres…
$100^2 = 10\ 000$ donc 100 répondant aux deux critères. C'est le plus petit nombre répondant aux deux critères car les nombres inférieurs à 100 ne s'écrivent pas avec trois chiffres.

En posant les multiplications, on obtient successivement :

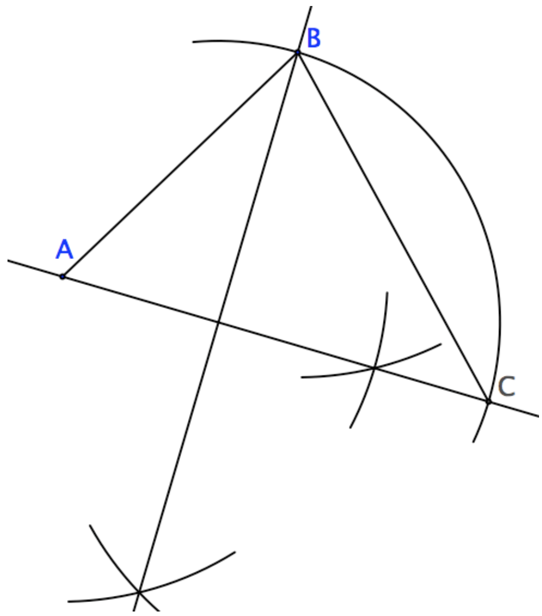
$320^2 = 102\,400$ donc 320 ne répond pas au critère portant sur les carrés, et tous les nombres supérieurs à 320 non plus.

$310^2 = 96\,100$ donc 310 répond aux deux critères
$315^2 = 99\,225$ donc 315 répond aux deux critères.
$316^2 = 99\,856$ donc 316 répond aux deux critères.
$317^2 = 100\,489$ donc son carré est trop grand, ainsi que tous ceux des nombres supérieurs à 317

316 est donc le plus grand nombre entier répondant aux deux critères.
De plus tout entier compris entre 100 et 316 convient également puisque son carré est compris entre 10 000 et 99 856

Le nombre d'entier qui conviennent est donc égal à
316 - 100 + 1 soit 217.

Problème 45 : construction d'un triangle
Voici une des nombreuses constructions possibles.



Problème 46 : débit d'une pompe
Le volume total de liquide étant de 3600 litres, quand toutes les cuves contiennent autant elles contiennent chacune 1200 litres.

La cuve contenant initialement 1600 litres se sera donc vidée de 400 litres.
Pour que la cuve vide en contiennent 1200, il faudra donc que 800 litres proviennent de la cuve de 2000 litres.
Or 800 est le double de 400, la cuve de 200 litres doit donc se vider à un débit double de celle de 1600 litres soit 20 litres par minutes.

Problème 47 : Programme de construction
Programme.
Construire un triangle équilatéral ABD.
Construire la perpendiculaire à (AD) passant par B. Soit H son intersection avec (AD)
Placer C sur [AD) de telle façon que HB = HC.

Justification.
Le triangle ABD est équilatéral donc $\widehat{BAD} = 60°$.

De plus Le point C est sur [AD) donc $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60°$.

Le triangle BHA est rectangle en H, donc $\widehat{ABH} = 90° - \widehat{BAH} = 30°$

Le triangle BHC est rectangle et isocèle en H donc $\widehat{HBC} = 45°$

$\widehat{ABC} = \widehat{ABH} + \widehat{HBC} = 30° + 45° = 75°$

Problème 48 : division euclidienne.
soit q le quotient commun aux deux divisions et soit r leur reste.

On a donc $A = 9q + r$ $B = 5q + r$ et $A = B + 100$

On en déduit que $9q + r = 5q + r + 100$ d'où $4q = 100$ et $q = 25$.

De plus, le reste dans la division par 5 ne peut prendre comme valeurs que 0, 1, 2, 3, ou 4.

Il y a donc 5 solutions au problème :

$A = 9 \times 25 = 225$ et $B = 5 \times 25 = 125$

$A = 9 \times 25 + 1 = 226$ et $B = 5 \times 25 + 1 = 126$

$A = 9 \times 25 + 2 = 227$ et $B = 5 \times 25 + 2 = 127$

$A = 9 \times 25 + 3 = 228$ et $B = 5 \times 25 + 3 = 128$

$A = 9 \times 25 + 4 = 229$ et $B = 5 \times 25 + 4 = 129$

Problème 49 : carrés se terminant par 26
Soit A un nombre entier dont le carré se termine par 6, le chiffre des unités de A est 4 ou 6.

A est donc égal à $10\,d + 4$ ou à $10\,d + 6$ (d n'est pas le chiffre des dizaines mais le nombre de dizaines dans A, il peut être supérieur à 9)

Si $A = 10d + 4$,
$A^2 = (10d + 4)^2$
$A^2 = 100d^2 + 80d + 16$
$A^2 = 100d^2 + 80d + 10 + 6$
$A^2 = 10(10d^2 + 8d + 1) + 6$
Le nombre de dizaines dans A^2 est donc impair par conséquent A^2 ne peut pas se terminer par 26

De même, si $A = 10d + 4$ le développement du calcul de A^2 donne
$A^2 = 10(10d^2 + 8d + 3) + 6$
Le nombre de dizaines dans A^2 est à nouveau impair et A^2 ne peut pas se terminer par 26

Il n'existe donc pas d'entiers dont le carré se termine par 26.

Problème 50 : feu le CRPE

année	postes
2011	120
2012	80
2013	53
2014	35

année	postes
2015	23
2016	15
2017	10
2018	6
2019	4
2020	2
2021	1
2022	0

Il n’y aura plus aucun poste à partir de 2022.

Les calculs peuvent être effectués à la main, mais un tableur est tout à fait indiqué pour ce type de tâche.