Préparation du CRPE, problèmes du jour, aout-septembre 2011 (61 à 72)

Problème 61
Combien y a-t-il de nombres entiers de quatre chiffres dont les quatre chiffres sont différents ?

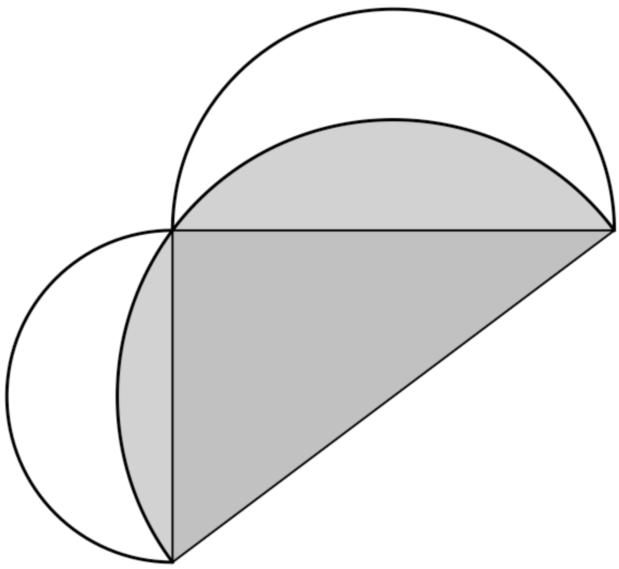
Problème 62
Construire, en utilisant exclusivement la règle graduée et le compas, un triangle ABC isocèle en A dont l'angle de sommet A mesure 75° et donc la hauteur issue de A mesure 5 cm.

Problème 63

	a	*b*	*c*	*d*
1		**1**	**2**	**3**
2	**1**	1	4	9
3	**2**	2	8	18
4	**3**	3	12	27

Quelle formule peut-on écrire dans la cellule b2 de cette feuille de calcul puis recopier en tirant vers le bas et vers la droite pour que les cellules grisées contiennent les résultats indiqués ?

Problème 64



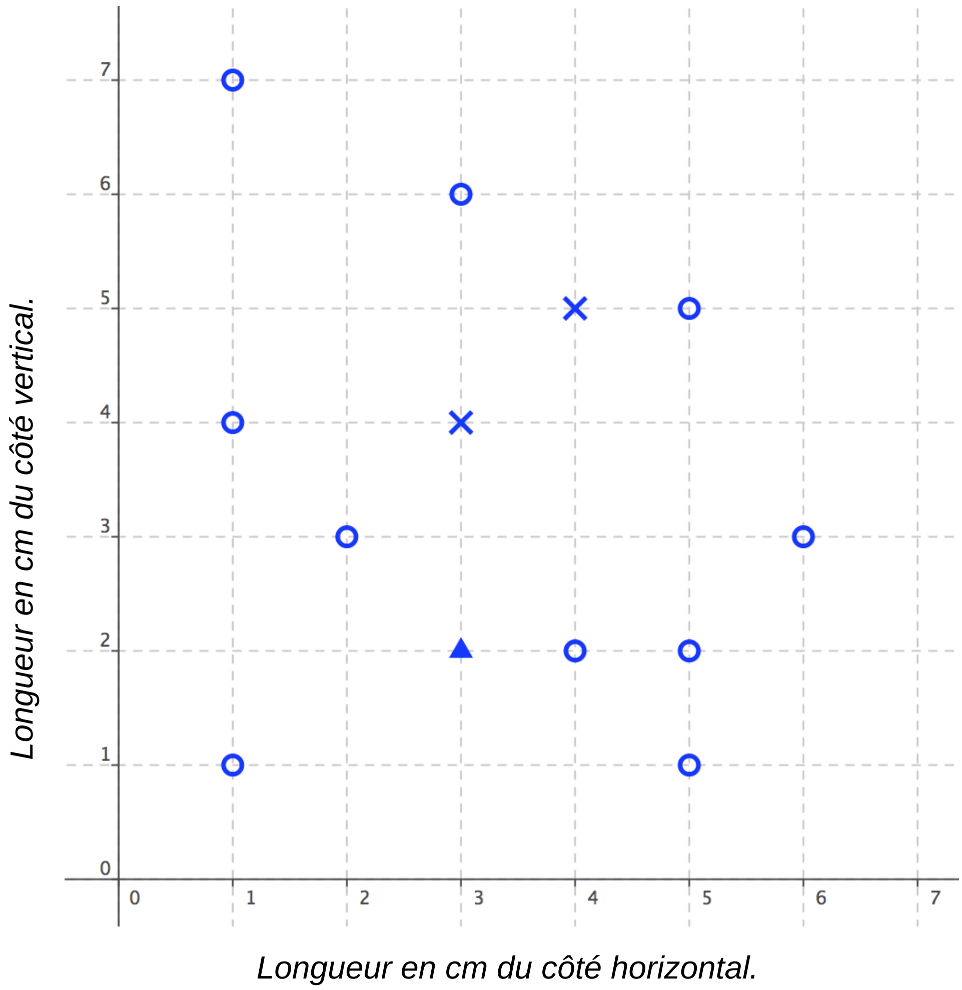
On construit comme le montre la figure trois demi-cercles ayant pour diamètre les côtés d'un triangle rectangle. Les côtés de l'angle droit du triangle mesurent respectivement 6 cm et 8 cm.

Calculer la surface totale des deux lunules (partie non grisée de la figure).

Problème 65
Trouver un nombre entier différent de 1024 ayant le même nombre de diviseurs que 1024.

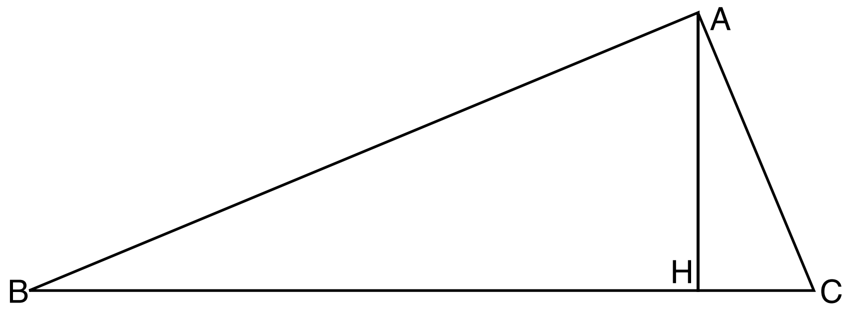
Problème 66
Un économiseur d'écran trace aléatoirement des rectangles (dont les côtés sont parallèles au bord de l'écran et mesurent un nombre entier de centimètres).
Le graphique suivant montre les dimensions des premiers rectangles tracés

Un rond sur le graphique correspond à un rectangle.
Une croix indique que deux rectangles ayant les mêmes dimensions ont été tracés.
Le triangle indique que 3 rectangles ayant les mêmes dimensions ont été tracés.



On s’intéresse aux périmètres de tous les rectangles tracés à l’écran.
Quelle en est la médiane ?

Problème 67



ABC est un triangle rectangle en A, et H est le pied de la hauteur issue de A.
AH = 5 cm, BH = 12 cm.

Calculer AC.

Problème 68
Construire à la règle graduée et au compas un triangle dont deux côtés mesurent respectivement 5 cm et 8 cm, et dont l'aire mesure 10 cm^2 .
Si il existe plusieurs triangles non superposables répondant à la question, on les construira tous.

Problème 69

On donne $A = 3\times\dfrac{3+\dfrac{3+\dfrac{1}{3}}{3}}{1+\dfrac{3-\dfrac{1}{3}}{3}}$ Ecrire le nombre A sous forme d'une fraction irréductible.

Problème 70
Un cycliste effectue un trajet constitué de 20 km de montée suivis de 30 km de descente.
Sa vitesse en descente est 3 fois plus rapide qu'en montée.
La durée totale du trajet est de 2 heures et 30 minutes.
Calculer la vitesse du cycliste en montée.

Problème 71
On dispose de plaques rectangulaires de 5 cm sur 3 cm avec lesquelles on veut recouvrir entièrement un carré. de 11 cm sur 11 cm.
Les rectangles peuvent éventuellement se superposer partiellement, mais ils ne peuvent pas être découpés.
Combien de plaques sont nécessaires ?

Problème 72
Un dé ordinaire est posé sur le sol.
On ferme les yeux, et on fait basculer le dé autour d'une de ses arêtes situées sur le sol. On peut le faire basculer dans quatre directions considérées comme équiprobables.
Après cette manœuvre, le nombre qui était situé sur la face supérieur se trouve sur une des faces verticales.
On effectue alors de la même façon un nouveau basculement au hasard.

Le «six» était initialement sur une face verticale, quelle est la probabilité qu'il se trouve sur la face supérieure après les deux basculements ?

Indications

Problème 61
On peut procédé en se demandant d'abord de combien de façon on peut choisir le premier chiffre, puis, pour chacun des choix, de combien de façon on peut choisir le deuxième chiffre…

Problème 62
On sait construire à la règle et au compas des angles de 90° et de 60°
On sait aussi construire la bissectrice d'un angle, ce qui permet d'obtenir, à partir des précédents, des angles de 45° ou de 30° puis de 15°.
Différentes combinaisons de ces valeurs permettent d'obtenir un angle de 75°.

Problème 64
Il est plus facile de calculer directement l'aire totale des deux lunules que de calculer l'aire de chaque lunule puis la somme des deux.

Problème 65
Décomposer 1024 en facteurs premiers permet de trouver le nombre de ses diviseurs.

Problème 66
Il est possible de calculer le périmètre de chaque rectangle, mais on peut gagner du temps en cherchant ou se situent sur le graphique des rectangles ayant le même périmètre.

Problème 67
Un petit coup de trigonométrie est bien utile.
Si on ne connaît aucune mesure d'angle aigu, en revanche on connaît des triangles rectangles ayant un angle en commun. Si deux angles sont égaux, leurs sinus (ou leurs cosinus, ou leurs tangentes) sont égaux.

Problème 68
On peut choisir de calculer l'aire d'un triangle en utilisant comme base n'importe quel côté.
On peut donc ici choisir un des côtés dont on connaît la longueur, et calculer la longueur de la hauteur correspondante.

Problème 70
Si vous décidez de raisonner algébriquement à partir de la relation $d = vt$ pensez que cette relation ne s'applique que si la vitesse est constante, ou à partir de la vitesse moyenne.
La vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours n'est pas la moyenne de la vitesse en montée et de la vitesse en descente.

Problème 71
Il ne suffit pas de calculer le nombre de rectangles nécessaires pour disposer d'une aire totale supérieure à celle du carré, il faut aussi vérifier qu'on peut disposer les rectangles pour recouvrir effectivement le carré.

Problème 72
Placer un dé avec le «6» sur une face verticale permet de voir où se retrouve le «6» après chacun des 4 basculements possibles.
Cette petite expérience permet de commencer une arborescence, qu'il faut poursuivre ensuite.

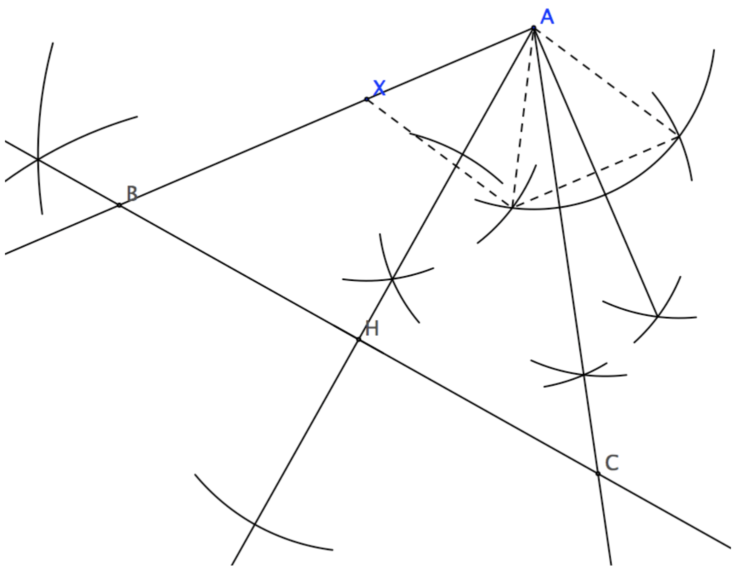
Solutions

Problème 61
Il y a 9 choix possibles pour le premier chiffre (de 1 à 9)
Il y a encore 9 choix possibles pour le deuxième chiffre (de 0 à 9 mais le chiffre déjà utilisé est exclu).
Il reste 8 choix possibles pour le troisième chiffre, et 7 pour le dernier.

Le nombre de possibilités est donc égal à 9 x 9 x 8 x 7 soit 4536.

Remarque : on pourrait envisager de commencer par choisir le chiffre des unités : il y a dix possibilités… il est intéressant de chercher à expliciter pourquoi cette démarche n'aboutit pas aussi facilement que celle commençant par le chiffre des dizaines de mille.

Problème 62



Voici une des nombreuses constructions possibles. On a tracé dans l'ordre :
•le segment [AX] (arbitraire),
•les deux triangles équilatéraux en pointillé,
•deux bissectrices successives afin d'obtenir un angle de 15° qui ajouté à l'angle de 60° du triangle équilatéral voisin permet d'obtenir 75°,
•la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ qui est aussi la hauteur issue de A du triangle ABC puisque celui-ci est isocèle en A (les points B et C ne sont pas encore placés, mais ne sont pas utiles),
•le point H, pied de la hauteur, à 5 cm de A,
•la perpendiculaire à (AH) passant par H, qui permet d'obtenir les points B et C.

Problème 63
Une formule possible est : = $A2*B$1^2
Si l'écriture du carré dans le tableur vous pose problème, vous pouviez utiliser =$A2*B$1*B$1
Si vous avez proposé une formule différente, le plus sage est de la tester sur un tableur.

Problème 64
Pour calculer l'aire des deux lunules, on calcule l'aire totale (le triangle plus les deux demi-disques) puis on soustrait l'aire du demi-disque ayant pour diamètre l'hypoténuse.

L'aire des totale des deux lunules mesure donc : $\frac{\pi \times 4^2}{2} + \frac{\pi \times 3^2}{2} + \frac{6 \times 8}{2} - \frac{\pi \times 5^2}{2} = 24$ cm²

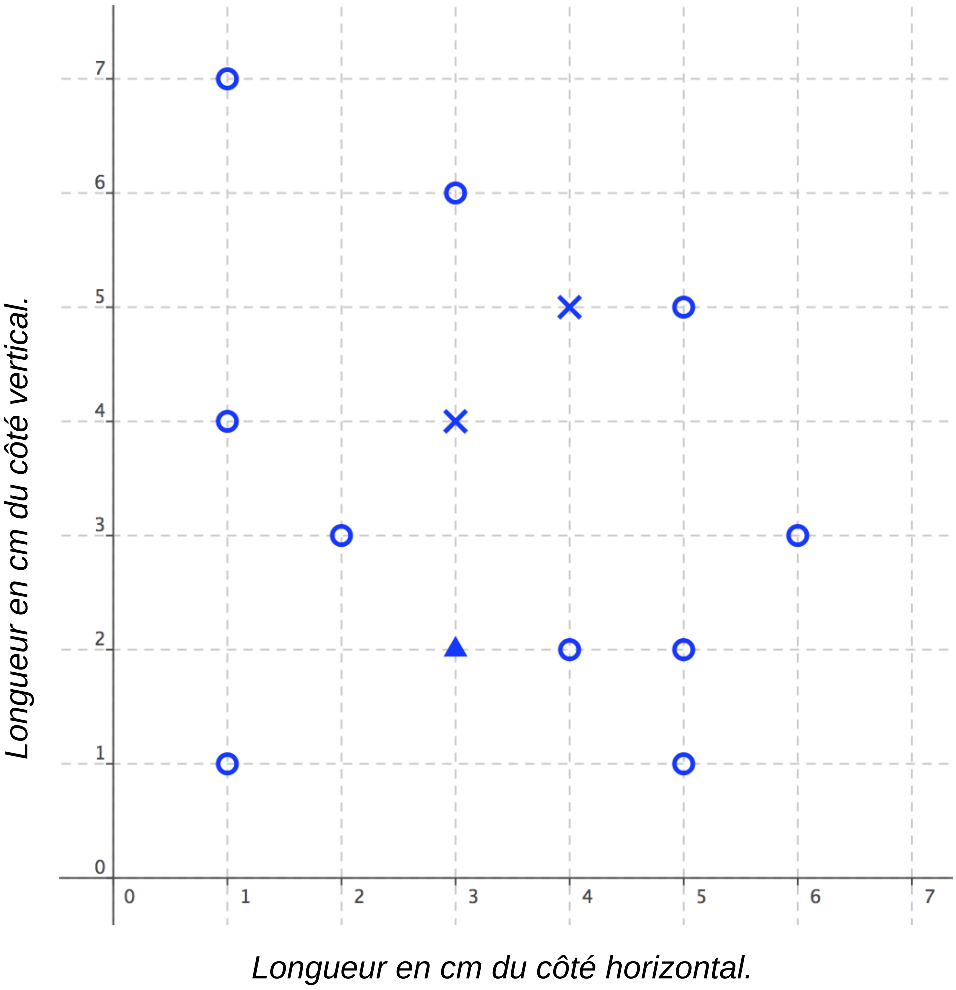
L'aire totale des lunules est égale à celle du triangle rectangle à partir duquel la figure est construite.
Il est intéressant de se demander si cette propriété est générale (si le triangle rectangle a des dimensions différentes, l'aire des lunules sera-t-elle encore égale à celle du triangle ?)

Problème 65
1024 est égal à 2^{10}
Par conséquent, les diviseurs de 1024 sont : 1, 2 , 2^2, 2^3… jusqu'à 2^{10}, il y en a 11.

Pour obtenir le même nombre de diviseurs, il suffit de choisir un nombre égal à a^{10} où a est un nombre premier.
Par exemple, le nombre 3^{10} (soit 59049) a pour diviseurs 1, 3 , 3^2, 3^3… jusqu'à 3^{10}, il y en a 11.

Remarque : le raisonnement ci-dessus ne suffit pas à prouver que l'on trouve ainsi tous les entiers ayant 11 diviseurs, mais ce n'était pas demandé.

Problème 66



Le graphique représente les dimensions de 17 rectangles.
La médiane des périmètres est donc donnée par le 9ème périmètre si on les range par ordre croissant.
Les périmètres des rectangles mesurent respectivement :
4 ; 10 ; 10 ; 10 ; 10 ; 10 ; 12 , 12 ; **14** ; 14 ; 14 ; 16 ; 18 ; 18 ; 18 ; 18 ; 20

La médiane des périmètres est donc de 14 cm.

Remarque : deux points d'une même droite tracée en pointillé sur le schéma représentent des rectangles de même périmètre. On peut le prouver en utilisant les équations de droite ou les fonctions affines. On peut se contenter de le comprendre en remarquant que si on se déplace en suivant une de ces droites en augmentant de 1 la longueur du rectangle, alors la largeur diminue de 1 et le périmètre reste inchangé.

Problème 67

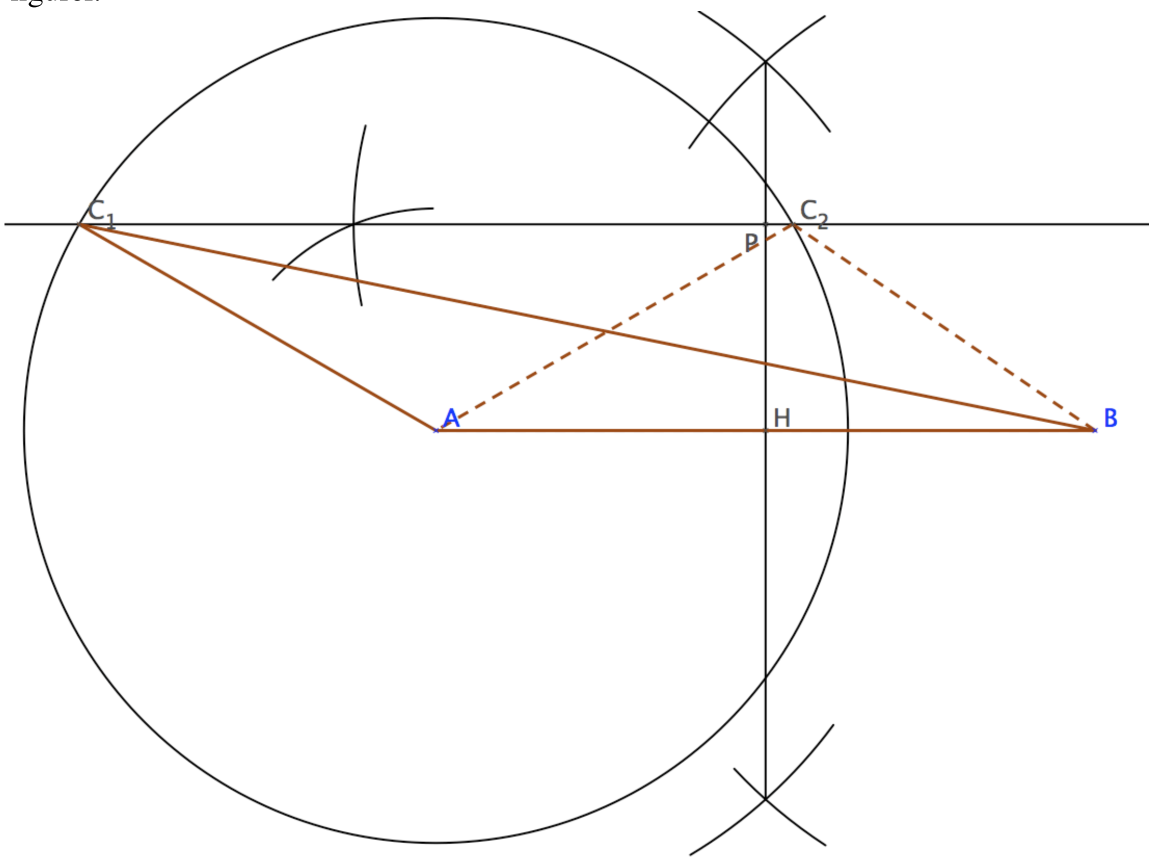
Le théorème de Pythagore, appliqué au triangle rectangle BAH, permet de conclure que $AB^2 = 144 + 25 = 169$ donc AB = 13 cm.

L'angle de sommet B est le même dans les triangles rectangles ABC et ABH, la tangente de cet angle est donc la même qu'on la calcule à partir des côtés de ABC ou de ceux de ABH.

On a donc : $\frac{AH}{BH} = \frac{AC}{AB}$ soit $\frac{5}{12} = \frac{AC}{13}$ d'où $AC = \frac{65}{12}$ cm

Problème 68

Appelons ABC le triangle, et considérons que AB = 8 cm et AC = 5 cm.
La hauteur relative à [AB] mesure 2,5 cm.
Il est possible de construire deux autres positions du point C, symétriques de C1 et C2 par rapport à la droite (AB), mais les triangles ainsi obtenus sont isométriques à ceux tracés ci-dessous, il n'est donc pas indispensable de les faire figurer.



Problème 69

$$A = 3\times\frac{3+\frac{3+\frac{1}{3}}{3}}{1+\frac{3-\frac{1}{3}}{3}} = 3\times\frac{9+3+\frac{1}{3}}{3+3-\frac{1}{3}} = 3\times\frac{27+9+1}{9+9-1} = 3\times\frac{37}{17} = \frac{111}{17}$$

La méthode de calcul indiquée ci-dessus et probablement parmi les plus économiques en écritures.
Les deux premières étapes consistent à simplifier la fraction principale en multipliant par 3 son numérateur et son dénominateur.

Problème 70
Solution algébrique :
Soit v la vitesse en km/h en montée, alors la vitesse en km/h en descente est égale à 3v
la durée en heures de la montée est égale à $\frac{20}{v}$
la durée en heures de la descente est égale à $\frac{30}{3v}$
La durée totale est la somme des deux durées précédentes, et elle est égale à 2 heures 30 minutes, on a donc :

$$\frac{20}{v}+\frac{30}{3v}=2,5$$
$$\frac{20}{v}+\frac{10}{v}=2,5$$
$$\frac{30}{v}=2,5$$
$$v=\frac{30}{2,5}=12$$

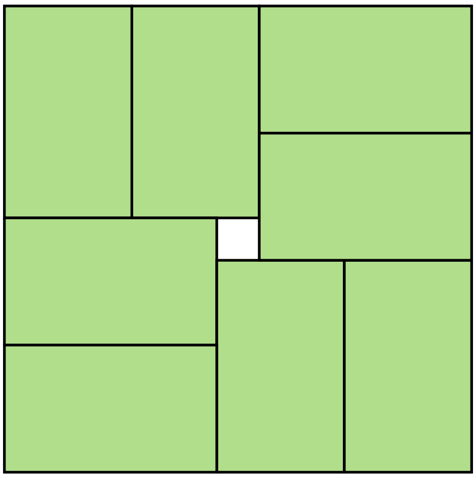
La vitesse du cycliste en montée est de 12 km/h

Solution arithmétique :
Supposons que la vitesse en montée soit de 10 km/h. la durée totale du trajet serait alors de 3 heures (deux pour la montée, une pour la descente).
La durée réelle est de 150 minutes et non 180 or la durée du trajet est inversement proportionnelle à la vitesse, la vitesse réelle est donc égale à $10\times\frac{180}{150}$ soit 12 km/h.
Remarque : cette rédaction passe un peu vite sur le fait que la vitesse en descente est d'après l'énoncé proportionnelle à la vitesse en montée et qu'il en est donc de même de la vitesse moyenne.

Autre solution arithmétique :
La durée d'un trajet est proportionnelle à la distance parcourue, mais inversement proportionnelle à la vitesse.
Pour parcourir 30 km à la vitesse de montée, il faudrait un temps égal à 1,5 fois la durée de la montée.
A une vitesse triple, il faut un temps égal à la moitié de la durée de la montée.
La montée à donc pris les deux tiers du temps, soit 100 minutes.
En montée, le cycliste parcourt donc 20 km en 100 minutes, 2 km en 10 minutes, 12 km en 60 minutes. Sa vitesse en montée est de 12 km/h.

Problème 71

Le carré à recouvrir a une aire de 121 centimètres carrés.
Chaque rectangle a une aire de 15 centimètres carrés.
8 x 15 = 120, il est donc impossible de recouvrir le carré avec 8 rectangles, mais cela ne prouve pas que c'est possible avec 9.
En plaçant 8 rectangles comme indiqué ci-dessous et le neuvième de façon à ce qu'il recouvre le trou central, on parvient bien à recouvrir le carré à l'aide de 9 rectangles.

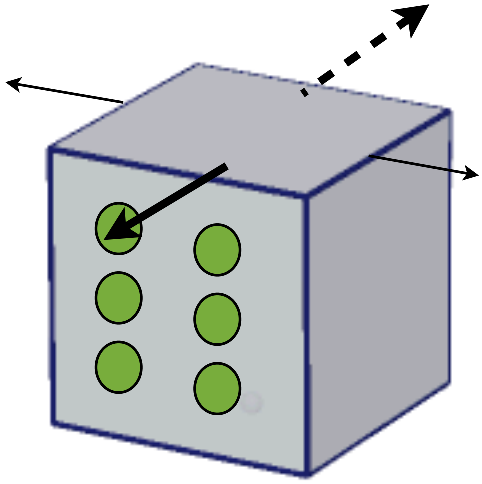


Problème 72

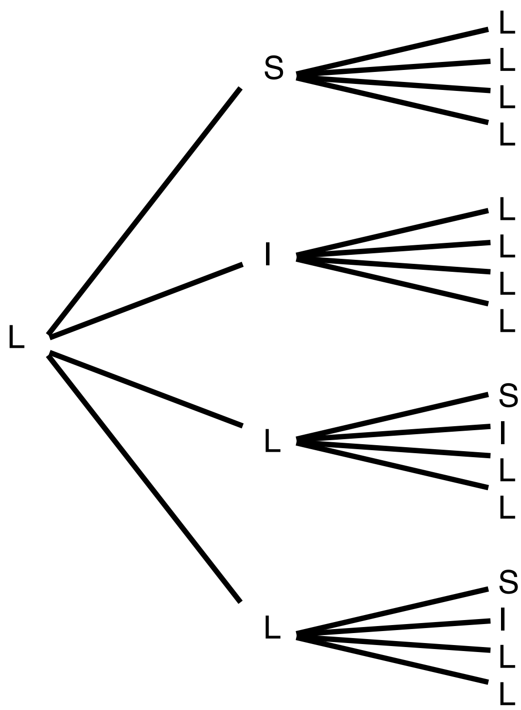
Si on bascule le dé vers l'observateur (flèche épaisse continue), le «6» se retrouve sur la face inférieur. Après le second basculement, il se situera nécessairement sur une face latérale.

Si on bascule le dé vers l'arrière (flèche épaisse pointillée), le «6» se retrouve sur la face supérieure. Après le second basculement, il se situera nécessairement sur une face latérale.

Si on bascule le dé vers l'un des côtés (flèches minces) le «6» reste sur une face latérale, le deuxième basculement s'analyse alors comme le premier.



On peut représenter tous les cas par cette arborescence dans laquelle L, S et I indiquent respectivement que le «6» se trouve sur une face latérale la face supérieure ou la face inférieure:



Ce schéma permet de constater que parmi les 16 issues possibles 2 conduisent à ce que le «6» soit sur la face supérieure.

La probabilité de cet événement est donc 1/8.