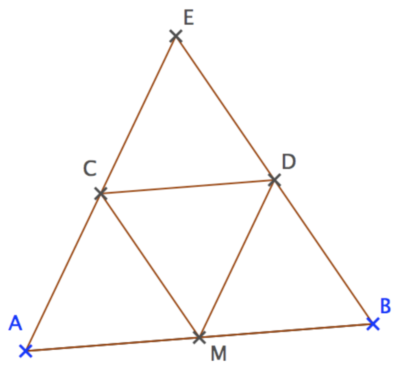
Quelques démonstrations coriaces corrigées.



On considère un segment [AB] et son milieu M.
C et D sont des points situés du même côté de (AB) et tels que AMC et BMD soient équilatéraux.
E est le point tel que :
CDE est équilatéral.
M et E sont de part et d'autre de la droite (CD).
Démontrer que les droites (EM) et (AB) sont perpendiculaires.

AMC est équilatéral, donc $\widehat{MAC} = 60°$.

BMD est équilatéral, donc $\widehat{BMD} = 60°$.

Les droites (AC) et (MD) forment avec leur sécante (AB) des angles correspondants $\widehat{MAC}$ et $\widehat{BMD}$ égaux, donc (AC) et (MD) sont parallèles.

M est le milieu de [AB] donc AM = MB.
AMC est équilatéral donc AC = AM.
BMD est équilatéral donc MB = MD
AC = AM et AM = MB et MB = MD, donc AC = MD.

Les côtés opposés [AC] et [MD] du quadrilatère AMDC sont à la fois parallèles et de même longueur, donc AMDC est un parallélogramme.

AMDC est un parallélogramme, donc AM = CD.
comme AM = MB et AM = CD, les trois triangles équilatéraux mentionnés dans l'énoncé sont isométriques, il en résulte que les quatre côtés du quadrilatères CMDE sont égaux, CMDE est donc un losange.
CMDE est un losange donc ses diagonales (EM) et (CD) sont perpendiculaires.

AMDC est un parallélogramme, donc (AM)// (CD) or (AM) est confondue avec (AB) donc (AB) // (CD)
(AB) et (CD) sont parallèles donc (EM), qui est perpendiculaire à (CD), l'est aussi à (AB).

Remarque : de nombreuses autres démonstrations sont possibles, dont certaines consistent essentiellement à montrer que ABE est équilatéral. Il ne suffit pas pour cela de montrer que AC = CE = BD = DE. En effet si A C et E ne sont pas alignés, AE n'est pas égal à AC + CE et on ne peut rien conclure. Il est donc indispensable de montrer que AC et E sont alignés (ainsi que B, D et E) avant de conclure.

ABC est un triangle, I est le milieu de [AB].
La parallèle à (BC) passant par I coupe (AC) en M.
Démontrer que M est le milieu de [AC] sans utiliser aucun des deux théorèmes suivants :

- ***Si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle, elle est parallèle au troisième côté.***
- ***Si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à un deuxième côté, alors elle passe par le milieu du troisième côté.***

Soit P l'intersection de (IM) et de la parallèle à (AB) passant par C.
Les côtés opposés du quadrilatère BIPC sont deux à deux parallèles par construction, donc BIPC est un parallélogramme.
BIPC est un parallélogramme donc BI = PC et (BI) // (PC), ce qui revient à dire que (IA) // (PC).
I est le milieu de [AB] donc AI = BI.
AI = BI et BI = PC donc AI = PC.
Les côtés opposés [AI] et [PC] du quadrilatère non croisé AICP sont à la fois parallèles et de même longueur, donc AICP est un parallélogramme.
AICP est un parallélogramme donc ses diagonales se coupent en leur milieu, M est donc le milieu de [AC].

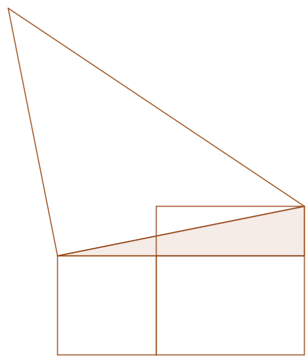
ABC est un triangle rectangle en A.
M et N sont les milieux respectifs de [AB] et [AC].
H est le pied de la hauteur issue de A.
Démontrer que le triangle MHN est rectangle en H.

Dans le triangle ABC, M et N sont les milieux des côtés [AB] et [AC] donc (MN) // (BC).
Dans le triangle ABH, la droite (MN) passe par le milieu de [AB] et est parallèle à (BH), elle passe donc par le milieu de [AH], que l'on nommera P.

(AH) est la hauteur issue de A du triangle ABC, donc (AH) est perpendiculaire à (BC).
(MN) est parallèle à (BC) et (AH) est perpendiculaire à (BC) donc (AH) est perpendiculaire à (MN).

(AH) est perpendiculaire à (MN) et le milieu P de [AH] est situé sur (MN) donc H est le symétrique de A par rapport à (MN).

Dans la symétrie par rapport à (MN), les points M, A et N ont respectivement pour symétriques M, H et N, par conséquent les triangles MAN et MHN sont symétriques. MAN étant rectangle en A, il en résulte que MHN est rectangle en H.



On considère deux carrés et un triangle isocèle rectangle disposés comme l'indique le schéma ci-contre.
Démontrer que l'aire du triangle est égale à la somme des aires des carrés.

notons a la longueur du côté du petit carré, b la longueur du côté du grand carré, c le côté du triangle rectangle isocèle.
Le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle grisé sur la figure permet d'affirmer que : $c^2 = (b+a)^2 + (b-a)^2$

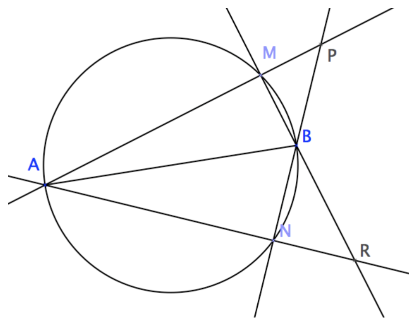
en transformant l'écriture de cette égalité, on obtient successivement :

$$c^2 = b^2 + a^2 + 2ab \quad + \quad b^2 + a^2 - 2ab$$

$$c^2 = 2b^2 + 2a^2$$

$$\frac{c^2}{2} = b^2 + a^2$$

La dernière égalité traduit précisément ce qu'on cherche à prouver : l'aire du triangle rectangle isocèle est la somme des aires des deux carrés.



On considère un cercle de diamètre [AB] et des points M et N de ce cercle.
Soit P l'intersection de (AM) et (BN).
Soit R l'intersection de (AN) et (BM).
Démontrer que les droites (AB) et (PR) sont perpendiculaires.

M est sur le cercle de diamètre [AB] donc Le triangle AMB est rectangle en M. Il en résulte que les droites (RM) t (AM) sont perpendiculaire et que (RM) est la hauteur issue de R du triangle ARP.
On démontre de la même façon que (PN) est la hauteur issue de P du triangle ARP.
Les hauteurs (RM) et (PN) se coupent en B donc B est l'orthocentre de ARP.
La droite (AB) passe par le sommet A de ARP et par son orthocentre B, c'est donc la hauteur issue de A, par conséquent (AB) est perpendiculaire à (RP).

Remarque : il est plus facile de voir les hauteurs d'un triangle quand elles sont situées à l'intérieur du triangle, ce qui explique le choix du triangle APR et de son orthocentre B.
Si la figure que vous avez tracée est disposée différemment, il se peut que vous ayez plutôt utilisé le triangle ARB et son orthocentre P ou le triangle APB et son orthocentre R ou encore le triangle PBR et son orthocentre A.
Une démonstration correcte analogue à celle rédigée ci-dessus est possible avec chacun de ces triangles.

Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes