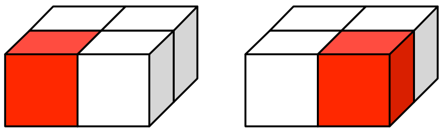
Quelques problèmes de dénombrement (2)

Combien peut-on tracer de triangles différents dont chaque côté mesure un nombre entier de cm, et dont le périmètre est égal à 30 cm ?

En base 5, combien y a-t-il de nombres de trois chiffres qui s'écrivent avec trois chiffres différents ?

On dispose de cubes rouges, noirs et bleus, en quantité aussi grande qu'on le veut, et on fabrique des assemblages de 4 cubes disposés « en carré » comme les deux exemples ci-dessous :



Les deux exemples peuvent-être considérés comme deux vues du même objet, il s'agit donc d'un seul et même assemblage.
Combien d'assemblages différents peut-on fabriquer ?

On fabrique un grand cube en collant 64 petits cubes identiques.
Chaque petit cube est collé à chacun de ceux qui ont une face en commun avec lui par un point de colle (un seul point de colle pour l'assemblage, et non un point pour chaque petit cube).
Combien de points de colle sont nécessaires pour réaliser l'assemblage ?

Combien y a-t-il de nombres premiers inférieurs à 50 ?

On dispose de 8 objets coûtant respectivement 1€, 2€…jusqu'à 8€.
On veut partager ces 8 objets en deux lots d'égale valeur.
De combien de façons différentes peut-on effectuer ce partage ?

Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.

Correction des problèmes de dénombrement (2)

Le plus grand côté a une mesure inférieure à la somme des mesures des deux autres côtés.
Le périmètre étant 30 cm, le plus grand côté mesure au maximum 14 cm.
Rangeons les triangles possibles par ordre décroissant de longueur de leurs côtés.
Les triangles possibles ont donc des côtés qui mesurent :
14 14 2 ; 14 13 3 ; 14 12 4 ; 14 11 5 ; 14 10 6 ; 14 9 7 ; 14 8 8
13 13 4 ; 13 12 5 ; 13 11 6 ; 13 10 7 ; 13 9 8
12 12 6 ; 12 11 7 ; 12 10 8 ; 12 9 9
11 11 8 ; 11 10 9
10 10 10.
On constate que le nombre de triangles différents qu'on peut obtenir est 19.

Un nombre s'écrivant en base 5 avec trois chiffres différents s'obtient en choisissant le premier chiffre parmi quatre possibilités (1, 2, 3 ou 4) puis le deuxième chiffre parmi à nouveau quatre possibilités (de 0 à 4 à l'exclusion de la valeur choisie pour le premier chiffre) et enfin le troisième chiffre parmi trois possibilités (les 4 précédentes moins celle qui vient d'être choisie pour le deuxième chiffre).
On peut donc ainsi obtenir 4 x 4 x 3 = 48 nombres différents.

Il y a trois objets d'une seule couleur.
Les objets constitués de trois cubes d'une même couleur et un cube d'une autre couleur sont au nombre de 6 (trois choix pour le cube unique puis deux pour celui en triple).
Les objets constitués de deux cubes d'une couleur et deux cube d'une autre couleur sont au nombre de 6 (3 choix possibles des couleurs car cela revient à choisird la couleur non utilisée mais deux dispositions possibles selon que les cubes de la même couleur sont adjacents ou non).
Les objets comportant les trois couleurs sont au nombre de 6 (trois choix possible de la couleur représentée deux fois, et deux dispositions possibles selon que les cubes identiques sont adjacents ou non).
Le nombre d'objets différents est donc égal à 3 + 6 + 6 + 6 = 21

Toutes les faces des petits cubes sont collées, à l'exception de celles qui sont situées sur une face du grand cube. Le nombre de faces de petits cubes collées est donc :
64 x 6 – 6 x 16 = 288.
Comme on ne compte qu'un point de colle pour deux faces assemblées, le nombre de points de colle nécessaire est donc de 144.

Les nombres premiers inférieurs à 50 sont :
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 et 47, il y en a 15.

La valeur totale des huit objets est 36€. Chaque lot doit valoir 18 €.
Pour chaque façon de partager, un des lots contient l'objet de 8 €, le nombre de façons de partager est donc égal au nombre de façons de faire un lot de 18 € contenant l'objet de 8€.
Les différents lots possibles correspondent aux sommes suivantes :
8+7+3 ; 8+7+2+1 ; 8+6+4 ; 8+6+3+1 ; 8+5+4+1 ; 8+5+3+2 ; 8+4+3+1.
Il y donc 7 façons différentes d'effectuer le partage.