Exercices à propos de la division euclidienne.

1. Déterminer en posant effectivement la division le quotient et le reste de 567 083 par 63.

567 083	63
-567 000	9000
83	+ 1
-63	9001
20	

Le quotient de la division est 9 001, son reste est 20.

2. Déterminer en posant effectivement la division le quotient et le reste de 21 550 par 27.

21550	27
-189	798
265	
-243	
220	
-216	
4	

Déduire de la question précédente le quotient et le reste de la division de 215 503 par 27.

La division posée ci-dessus peut se traduire par l'égalité 21550 = 798 x 27 + 4
On déduit de l'égalité ci-dessus les égalités suivantes :
215 500 = 7 980 x 27 + 40
215 503 = 7 980 x 27 + 43
215 503 = 7 980 x 27 + 27 + 16
215 503 = 7 981 x 27 + 16
Il résulte de la dernière égalité que le quotient de la division de 215 503 par 27 est 7 981 et le reste 16.

3. Montrer comment il est possible de déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de 3557 par 29 en posant uniquement des additions ou des soustractions.

Il est possible d'utiliser les produits de 29 par 10 et 100 (qui sont calculés mentalement, ce que n'interdit pas la question). Voici une autre solution :

2 x 29 = 29 + 29 = 58   4 x 29 = 58 + 58 = 116
8 x 29 = 116 + 116 = 232   16 x 29 = 232 + 232 = 464
32 x 29 = 464 + 464 = 928   64 x 29 = 928 + 928 = 1856
128 x 29 = 1856 + 1856 = 3712

3712 - 116 = 3596 = 128 x 29 - 4 x 29 = 124 x 29
3596 - 58 = 3538 = 124 x 29 - 2 x 29 = 122 x 29.
3557 = 3538 + 19 = 122 x 29 + 19
Le quotient de la division de 3557 par 29 est donc 122, son reste est 19.

4. Quel est le plus grand nombre s'écrivant avec 4 chiffres et dont le reste dans la division par 100 est égal à 38 ?
Un nombre entier qui a pour reste 38 dans la division par 100 est un nombre qui se termine par 38.
Le plus grand nombre de 4 chiffres ayant pour reste 38 dans la division par 100 est donc 9938.

5. Quel est le plus petit nombre de 4 chiffres dont le reste de la division par 29 est 18 ?
En posant la division de 1 000 par 29 on trouve que 1000 = 34 x 29 + 14
Le nombre cherché est donc 34 x 29 + 18, c'est à dire 1004.

Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.

6. Déterminer sans poser la division le reste de la division de 35 238 par 90.

Les nombres suivants sont des multiples de 90 :

36 000 900 36 000 - 900 = 35 100 35190

35 238 = 35 190 + 48 et 35 190 est un multiple de 90, le reste de la division de 35 238 par 90 est donc 48.

7. La division euclidienne de 45 925 par 37 a pour quotient 1241 et pour reste 8.
Déduire de ce qui précède :

le quotient et le reste de la division de 46 000 par 37,

45 925 = 1241 x 37 + 8

46 000 = 45925 + 75 = 1241 x 37 + 8 + 2 x 37 + 1 = 1243 x 37 + 9

Le quotient de la division de 46 000 par 37 est 1243, le reste est 9.

le quotient et le reste de la division de 459 250 par 37,

45 925 = 1 241 x 37 + 8

459 250 = 12 410 x 37 + 80 = 12 410 x 37 + 2 x 37 + 6 = 12 412 x 37 + 6

Le quotient de la division de 459 250 par 37 est 12 412, le reste est 6.

le quotient et le reste de la division de 459 250 par 370,

45 925 = 1 241 x 37 + 8

45 9250 = 1 241 x 370 + 80

Le quotient de la division de 459 250 par 370 est 1 241, le reste est 80.

le quotient et le reste de la division de 45 925 par 74.

45 925 = 1 241 x 37 + 8

45 925 = 1 240 x 37 + 37 + 8

45 925 = 620 x 2 x 37 + 45

45 925 = 620 x 74 + 45

Le quotient de la division de 4 5925 par 74 est 620, le reste est 45.

8. Est il possible que deux nombres distincts aient à la fois le même quotient et le même reste dans la division par 17 ?

Soit q le quotient commun aux deux divisions, et r le reste commun.

Chacun des deux nombres vaut 17 q + r, les deux nombres ne peuvent donc pas être différents.

9. Quel est le reste de la division de 444 444 444 444 444 444 444 444 par 9 ?

La somme des chiffres de 444 444 444 444 444 444 444 444 est 96, ce nombre n'est pas multiple de 9.

Nous allons construire un multiple de 9 voisin du nombre proposé pour en déduire le reste cherché.

La somme des chiffres de 444 444 444 444 444 444 444 447 est 99, donc ce nombre est multiple de 9

444 444 444 444 444 444 444 447 - 9 = 444 444 444 444 444 444 444 438 est donc également un multiple de 9

444 444 444 444 444 444 444 444 = 444 444 444 444 444 444 444 438 + 6, son reste dans la division par 9 est donc 6.

10. Quel est le reste de la division de 555 555 555 555 555 555 555 par 11 ?

```
  505 050 505 050 505 050 500
+  50 505 050 505 050 505 050
  555 555 555 555 555 555 550
```

555 555 555 555 555 555 550 est donc un multiple de 11

Le reste dans la division de 555 555 555 555 555 555 555 par 11 est donc 5.

11. Un nombre entier A a pour reste 7 dans la division euclidienne par 9.
Un nombre entier B, plus petit que A, a pour reste 5 dans la division euclidienne par 6.
Quel est le reste dans la division du nombre A - B par 3 ?

Les divisions dont il est question dans l'énoncé peuvent se traduire par les égalités suivantes :
A = 9 a + 7 et B = 6b + 5, où a et b sont des entiers.
On en déduit que :
A - B = 9a + 7 - (6b + 5)
A - B = 3 x 3a + 7 - 3 x 2b - 5
A - B = 3 (3a - 2b) + 2
Le reste de la division de A - B par 3 est donc 2.

12. Un nombre entier X a le même quotient dans la division euclidienne par 8 et dans la division euclidienne par 10. Quelles sont les valeurs possibles de X ?

soit q le quotient commun aux deux divisions, les deux égalités suivantes sont donc vérifiées :
X = 8 q + r et X = 10 q + r' (r et r' étant les restes respectifs des divisions de X par 8 et 10)
Il en résulte que 8 q + r = 10 q + r' donc que 2q = r - r'
r étant inférieur à 8, r - r' l'est également, les seules valeurs possibles que peut prendre le nombre pair 2q sont par conséquent 0, 2, 4 et 6. Les valeurs possibles de q sont donc 0, 1, 2 et 3.
Le tableau suivante indique donc toutes les possibilités (les solutions sont en gras).

X	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	8	9	**10**	**11**	**12**
quotient de X par 8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
quotient de X par 10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
X	**13**	**14**	**15**	16	17	18	19	**20**	**21**	**22**	**23**	24	25
quotient de X par 8	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3
quotient de X par 10	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
X	26	27	28	29	**30**	**31**	32						
quotient de X par 8	3	3	3	3	3	3	4						
quotient de X par 10	2	2	2	2	3	3	3						

13. Quel est le plus petit nombre s'écrivant avec 4 chiffres et qui a le même reste dans les divisions euclidiennes par 48 et par 36 ?

Soit A le nombre cherché, il a le même reste dans les divisions par 48 et 36 donc
A = 36 q + r = 48 q' + r où r est un entier inférieur à 36.
Il en résulte que 36 q = 48 q'.
Ce nombre est un multiple commun à 36 et 48, c'est à dire un multiple de leur PPCM
36 = 2 x 2 x 3 x 3 et 48 = 2 x 2 x 2 x 2 x 3 leur PPCM est donc 2 x 2 x 2 x 2 x 3 x 3 soit 144.

6 x 144 = 864, en ajoutant un reste inférieur à 36 on ne peut obtenir un nombre à 4 chiffres.
7 x 144 = 1008 est donc le plus petit multiple à 36 et 48 pouvant convenir. Comme il est lui même supérieur à 1000, 1008 est le nombre A cherché (il suffit de choisir 0 pour reste).