Problèmes à propos des nombres entiers naturels

1. On dispose d'une grande feuille de papier, on la découpe en 4 morceaux, puis on déchire certains morceaux (au choix) en 4 et ainsi de suite. Peut-on obtenir 2001 morceaux ?

2. On choisit un nombre entier positif de 2 chiffres. On écrit ce nombre à l'envers puis on calcule la somme des deux nombres. Quel sera son reste dans la division par 11 ?

3. On donne les nombres a = 3^2 x 5 x 7 x 11^2 et b = 2^2 x 3 x 5^2 x 11. Quel est leur plus grand diviseur commun ? Quel est leur plus petit multiple commun ?

4. On divise un nombre entier positif E par 10, le reste est 8. Quel est le reste dans la division de 3 E par 10 ?

5. Les nombres $R = 2^{10} + 4^{5}$ et $S = 20 \times 5^{10} + 5^{11}$ peuvent-ils s'écrire sous forme d'une puissance d'un nombre entier ?

6. Convertir en écriture décimale usuelle le nombre qui s'écrit $\overline{21023}$ en base 4. Même exercice avec le nombre $\overline{33333}$.

7. On remarque dans la table de multiplication 7 x 7 = 49 et 6 x 8 = 48 sont voisins. De même pour 9 x 9 = 81 et 8 x 10 = 80. Cette propriété est-elle générale ? Justifier votre affirmation.

8. Vous comptez de 7 en 7 à partir de 38. Quel est le dernier nombre inférieur à 365 que vous prononcez ?

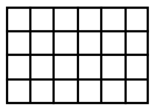
9. Le reste de la division d'un entier A par 9 est 6. Le reste de la division d'un entier B par 9 est 4.
   - Quel est le reste dans la division de A + B par 9 ? Quel est le reste dans la division de 3A + 2B par 9 ?
   - On choisit A et B tels que B > A. Quel est le reste dans la division de B - A par 9 ?

10. N est un nombre entier supérieur à 1 et inférieur à 10000. Quand on divise N par 2, par 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10, le reste est toujours 1. Combien vaut N ?

11. Un nombre entier s'écrit avec 3 chiffres. Son chiffre des centaines est 4. Ce nombre est 26 fois plus grand que le nombre à deux chiffres obtenu en enlevant le 4. Quel est donc ce nombre ?

12. Combien le nombre 720 a-t-il de diviseurs ?

13. Si on coupe cette plaque de chocolat en suivant les lignes horizontales, puis qu'on casse les carreaux de chaque ligne, il faut casser 23 fois pour que tous les carreaux soient séparés. peut on séparer tous les morceaux en moins de 23 coups ?



14. Convertir le nombre 2315 en base 4, puis en base 5.

15. Dans la division euclidienne d'un nombre entier non nul par 7, on trouve un quotient égal au double du reste. Trouver toutes les valeurs possibles de ce nombre.

16. On appelle nombres premiers triplets des nombres premiers tels que 3 ; 5 et 7 séparés par des différences de 2. Existe-t-il d'autres nombres premiers triplets que 3, 5 et 7 (fournir un exemple, ou prouver qu'il n'y en a pas) ?

17. Un nombre N est multiple de 91, et également multiple de 52. Le nombre N est il un multiple de (91 x 52) ?

18. Sachant que $65^2 - 63^2 = 16^2$ peut-on affirmer que $6565^2 - 6363^2$ est le carré d'un nombre entier ?

19. On cherche un multiple de 9 dont le quotient dans la division euclidienne par 21 est 32.

20. Quel est le plus petit entier de 10 chiffres dont la somme des chiffres est 30 ?

21. Je suis un nombre entier de trois chiffres. Si on échange mes deux chiffres de droite j'augmente de 36. Si on échange mes deux chiffres de gauche j'augmente de 270. Suis-je divisible par 9 ?

Yves Thomas, IUFM de l'université de Nantes, site de Nantes.

22. Trouver tous les diviseurs communs aux nombres 264 et 312.

23. Le reste de la division d'un entier A par 9 est 2.
    - Quel est le reste dans la division de 2 x A par 3 ? Quel est le reste dans la division de A^2 par 9 ?

24. Le produit de deux nombres premiers est il un nombre premier ? Un nombre entier peut-il être premier lorsque la somme de ses chiffres est un multiple de 5 ?

Corrigé des exercices sur les nombres entiers.

Problème 1 Recherche et brouillon :

Effectuons les premières étapes du découpage :

Quand on coupe un morceau en quatre, on a trois morceaux de plus qu'à l'étape précédente. (il y a un morceau qui disparait, celui qu'on découpe, mais 4 nouveaux morceaux).

Les nombres qui peuvent être obtenus sont donc les suivants :

1 $1 + 3$ $1 + 2 \times 3$ $1 + 3 \times 3$ $1 + 4 \times 3$ … $1 + n \times 3$

Solutions rédigées :

Chaque découpage d'un papier en quatre morceaux augmente le nombre de morceaux de 3.

Les nombres suivants seront donc atteints :

1 ; $1 + 600 \times 3 = 1801$; $1801 + 60 \times 3 = 1981$; $1981 + 6 \times 3 = 1999$.

Le nombre de morceaux à l'étape suivant 1999 est 2002, le nombre 2001 ne peut donc pas être atteint.

Chaque découpage d'un papier en quatre morceaux augmente le nombre de morceaux de 3.

Le nombre de morceaux après n étapes est donc égal à $1 + 3n$.

Le problème revient donc à savoir s'il existe un entier n tel que $1 + 3n = 2001$.

n résolvant cette équation, on constate que sa solution est $n = 2000/3$, qui n'est pas un nombre entier, il n'est donc pas possible d'obtenir exactement 2001 morceaux.

Chaque découpage d'un papier en quatre morceaux augmente le nombre de morceaux de 3.

Le nombre initial étant 1, les autres sont de la forme $1 + 3\,n$, ou n est un nombre entier.

Cette écriture montre que les nombres obtenus ont pour reste 1 dans la division par 3.

2001 est divisible par 3, il ne peut donc pas être obtenu.

Problème 2. Recherche et brouillon :

$23 + 32 = 55 = 5 \times 11$ $17 + 71 = 88 = 8 \times 11$ $49 + 94 = 143 = 13 \times 11$

Le reste de la division par 11 semble être toujours 0, encore faut-il le prouver.

Quand la somme est inférieure à 100, son chiffre des dizaines est égal au chiffre des unités.

Cela incite à penser que la décomposition du nombre en dizaines et unités joue un rôle.

23, c'est 2 dizaines et 3 unités. 32 c'est trois dizaines et 2 unités

23 + 32, c'est donc 5 dizaines et 5 unités.

Le déclic consiste à changer de perspective, à ne plus compter en dizaines et unités, mais à remarquer que, comme il y a autant de dizaines que d'unités, on peut faire 5 paquets de 11.

Rédiger une preuve consiste à prouver que ce regroupement par 11 est toujours possible. L'écriture algébrique est un bon outil.

Solution rédigée :

On note $\overline{abc}$ le nombre qui s'écrit avec le chiffre a suivi du chiffre b.

$\overline{abc} + \overline{acb} = 10\,a + b + 10\,b + a = 11\,a + 11\,b = 11\,(a+b)$.

$\overline{abc} + \overline{acb}$ est multiple de 11, le reste de sa division par 11 est donc égal 0.

Problème 3 Solution rédigée :

$a = 3^2 \times 5 \times 7 \times 11^2$ et $b = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 11$

On a alors : PGCD (a ; b) = $3 \times 5 \times 11 = 165$ et PPCM (a ; b) = $2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11^2$

Problème 4 Recherche et brouillon.

Prenons des exemples : Si on divise 58 par 10, le reste est 8, si on divise $3 \times 58 = 174$ par 10, le reste est 4

Si on divise 28 par 10, le reste est 8, si on divise $3 \times 28 = 84$ par 10, le reste est 4

On peut chercher à montrer que le reste est toujours 4 par une méthode algébrique, mais on peut aussi grâce aux exemples prendre conscience que le reste dans la division par 10 c'est aussi le chiffre des unités (c'est ce qui n'est pas regroupé dans des dizaines).

Solutions rédigées.

Le reste de la division par 10 d'un entier, c'est son chiffre des unités. Si le chiffre des unités de E est 8, en posant la multiplication de E par 3, on obtiendra un chiffre des unités égal à 4. Le reste de la division de 3E par 10 est donc 4.

Le reste de la division de E par 10 est 8 donc E = 10 k + 8, où k est un entier.
On a alors : 3E = 3 (10k + 8) = 30 k + 24 = 30 k + 20 + 4 = 10 (3 k + 2) + 4, or (3k + 2) est un nombre entier donc le reste de la division de 3E par 10 est 4.

Problème 5 Recherche et brouillon.
Renonçons à appliquer des formules sur les puissances éventuellement mal connues et à caractère magique.
Utilisons plutôt des connaissances solides :
On sait ce que signifie une écriture sous forme de puissance : 5^6=5x5x5x5x5x5, c'est le résumé de multiplications réitérées.
On sait par ailleurs mette sous forme de multiplication certains calculs donnés sous forme d'une addition :

10 x 4 + 7 x 4 = 17 x 4 50 + 50 + 50 = 3 x 50 $5 \times \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2 \times \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 7 \times \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 20 x 5^8 + 10 x 5^8 = 30 x 5^8

Solutions rédigées.

$$R = 2^{10} + 4^5$$
$$R = 2^{10} + 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$$
$$R = 2^{10} + 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$
$$R = 2^{10} + 2^{10}$$
$$R = 2 \times 2^{10}$$
$$R = 2^{11}$$

$$S = 20 \times 5^{10} + 5^{11}$$
$$S = 20 \times 5^{10} + 5 \times 5^{10}$$
$$S = 25 \times 5^{10}$$
$$S = 5 \times 5 \times 5^{10}$$
$$S = 5^{12}$$

Problème 6 Recherche et brouillon.
En base 4, le dernier chiffre compte des unités, le précédent des groupes de 4, le précédent des groupes de 4 x 4, puis de 4 x 4 x 4.
Le principe est le même que dans notre système de numération habituel, mais les groupements se font à chaque fois par 4 au lieu de se faire par 10.

Solution rédigée.
Soit N le nombre qui s'écrit $\overline{21023}$ en base 4

$$N = 2 \times 4^4 + 1 \times 4^3 + 0 \times 4^2 + 2 \times 4 + 3$$
$$N = 2 \times 256 + 1 \times 64 + 0 \times 16 + 8 + 3$$
$$N = 587$$

Soit P le nombre qui s'écrit $\overline{33333}$ en base 4

$$P = 3 \times 4^4 + 3 \times 4^3 + 3 \times 4^2 + 3 \times 4 + 3$$
$$P = 3 \times 256 + 3 \times 64 + 3 \times 16 + 12 + 3$$
$$P = 1023$$

Autre méthode utilisable uniquement pour le deuxième nombre.
Soit P le nombre qui s'écrit $\overline{33333}$ en base 4. P est le plus grand nombre s'écrivant avec 5 chiffres en base 4. P+1 est donc le premier nombre s'écrivant avec 6 chiffres en base 4. P+1 s'écrit $\overline{100000}$ en base 4, donc P+1 = 4^5 = 1024 et P = 1023.

Problème 7 Solution rédigée :
La propriété observée peut s'écrire sous la forme (a + 1) (a - 1) = a^2 - 1 , égalité vraie pour toutes les valeurs du nombre a.

Autre solution, n'utilisant que des notions de l'école élémentaire :

Considérons ce carré et le rectangle dont la longueur est supérieure de 1 au côté du carré et la largeur inférieur de 1 au côté du carré.
On suppose que ces figures sont tracées sur papier quadrillé (l'unité de longueur étant le côté d'un petit carreau) et superposées comme sur le dessin de droite. on note C la mesure du côté du carré.
Le nombre de petits carreaux contenus dans le carré est égal au nombre de carreaux dans la partie commune plus le nombre de carrreaux dans la bande blanche du bas.
Le nombre de petits carreaux contenus dans le rectangle vert est égal au nombre de carreaux dans la partie commune plus le nombre de carrreaux dans la bande grise de droite.
Or, le nombre de carreaux de la bande blanche C, celui de la bande grise est C - 1.
Il en résulte que le carré contient un petit carreau de plus que le rectangle : C x C = (C + 1) x (C - 1) + 1

Problème 8 Solutions rédigées :
Ecrivons certains des nombres obtenus en comptant de 7 en 7 à partir de 38 :
38 + 40 x 7 = 318 318 + 5 x 7 = 353 353 + 7 = 360 360 + 7 = 367.

Le dernier nombre inférieur à 365 que l'on prononce est donc 360.

365 - 38 = 327. en divisant 327 par 7 on trouve que 327 = 46 x 7 + 5
On en déduit que 365 = 38 + 46 x 7 + 5
Le dernier nombre inférieur à 365 prononcé est donc 38 + 46 x 7 = 360

38 = 5 x 7 + 3 Les nombres obtenus en comptant de 7 en 7 sont les suivants :
6 x 7 + 3 7 x 7 + 3… ce sont les entiers ayant pour reste 3 dans la division euclidienne par 7.
Or 365 = 52 x 7 + 1.
Le plus grand nombre inférieur à 365 ayant pour reste 3 dans la division par 7 est 51 x 7 + 3 c'est à dire 360 qui est donc le dernier nombre inférieur à 365 que l'on prononcera.

Problème 9 Recherche et brouillon.
Les nombres qui peuvent jouer le rôle de A sont : 6, 15, 24, 33, 42… et plus généralement A = 9n + 6, n étant un entier.
Les nombres qui peuvent jouer le rôle de B sont 4, 13, 22, 31, 40… et plus généralement B = 9p + 6, p étant un entier.
Choisissons quelques valeurs et posons les divisions :
si A = 15 et B = 31, A+B = 46 et le reste dans la division par 9 est 1
si A = 33 et B = 40, A+B = 73 et le reste dans la division par 9 est 1
Ceci fait penser que le reste de la divison est peut-être toujours 1, ce qui peut guider les calculs algébriques dans la solution rédigée.
En faisant des essais de la même manière, on est conduit à supposer que le reste de la divison de B-A par 9 est 7.

Solution rédigée :
On sait que A = 9 a + 6 et B = 9 b + 4 (a et b sont les quotients des divisions euclidiennes de A et B par 9)

A+ B = 9 a + 6 + 9 b + 4 = 9 a + 9 b + 10 = 9 a + 9 b + 9 + 1 = 9 (a + b + 1) + 1
Le reste de la division euclidienne de A + B par 9 est 1.

B – A = 9 b + 4 - (9 a + 6) B – A = 9 b - 9 a + 4 - 6 B – A = 9 (b-a) - 2 B – A = 9(b - a) - 9 + 7
On obtient finalement B – A = 9 (b - a - 1) + 7 le reste de la division euclidienne de B - A par 9 est donc 7.

Problème 10 Recherche et brouillon.
Si on traduit par une écriture en ligne les différentes divisions citées dans l'énoncé, on doit choisir 9 lettres différentes pour les différents quotients, qui ne sont pas égaux. Il est difficile d'en tirer quelque chose.
Toutefois, la contemplation des différentes écritures de N : 2a + 1, 3b + 1, 4c + 1, 5d + 1… peut conduire à penser que ces «1» sont bien gênants, s'ils n'étaient pas là on chercherait un multiple commun à 2, 3, 4…
Ceci conduit à la reformulation qui permet de résoudre le problème : on va s'intéresser d'abord à N - 1.

Solution rédigée :
Le reste de la division de N par 2 est 1, donc N = 2 k + 1, donc N – 1 = 2k
De même, N - 1 est multiple de 3, de 4… et de 10.
Ecrivons les nombres de 2 à 10 sous forme de produits de nombres premiers :
2 3 2 x 2 5 2 x 3 7 2 x 2 x 2 3 x 3 2 x 5
Le ppmc de ces nombres est 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 5 x 7 = 2520
Les multiples communs à 2, 3, 4…10 sont les multiples de leur ppmc
Comme N-1 est inférieur à 9999, ses valeurs possibles sont donc : 2520 ; 5040 et 7560.
N peut donc valoir 2521, 5041 ou 7561.

Problème 11 Recherche et brouillon.
Trois pistes au moins peuvent être explorées, qui conduisent à trois solutions différentes
- Utiliser sous forme algébrique la décomposition en centaines, dizaines, unités.
- Le nombre est entre 400 et 499, encadrer son quotient par 26.
- Le nombre cherché est un multiple de 26.

Solutions rédigées.
Soit d le chiffre des dizaines du nombre cherché, et u son chiffre des unités. On a :

$400 + 10d + u = 26(10d + u)$

$400 + 10d + u = 260d + 26u$

$400 = 250d + 25u$

$16 = 10d + u$

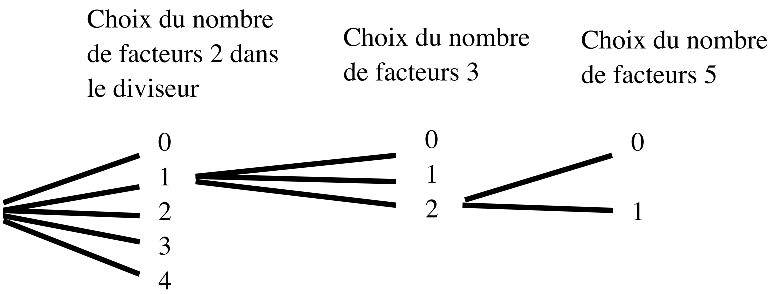
Le nombre cherché est donc 416

Le quotient euclidien de 400 par 26 est 15. le quotient entier de 500 par 26 est 19.
Le quotient par 26 du nombre cherché ne peut donc être que 15, 16, 17, 18 ou 19.
or 15 x 26 = 390 ; 16 x 26 = 416 ; 17 x 26 = 442 ; 18 x 26 = 468 et 19 x 26 = 494
Il en résulte que seul le nombre 416 répond à toutes les conditions du problème.

Le nombre cherché est un multiple de 26 compris entre 400 et 499 inclus
Seuls 416, 442, 468 et 494 répondent à ces deux conditions.
On a 416 = 26 x 16, mais $442 \neq 26 \times 42$, $468 \neq 26 \times 68$ et $494 \neq 26 \times 94$
Il y a donc une seule solution : 416

Problème 12 Solutions rédigées :
Cherchons tous les diviseurs de 720. Pour être certain de ne pas en oublier, regroupons les par paires dont le produit est 720 et essayons systématiquement toutes les valeurs possibles pour le plus petit des deux nombres.
Les diviseurs de 720 sont : 1 et 720 2 et 360 3 et 240 4 et 180 5 et 144 6 et 120 8 et 90 9 et 80 10 et 72
12 et 60 15 et 48 16 et 45 18 et 40 20 et 36 24 et 30
On constate que 720 a 30 diviseurs.

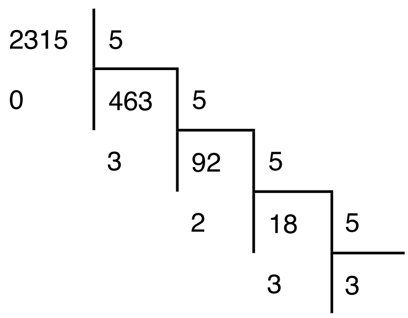
$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$



Cet arbre représente la façon de construire un diviseur de 720 à partir de sa décomposition en facteurs premiers. chaque branche terminale correspond à un diviseur (la branche où on ne choisit aucun 2 aucun 3 et aucun 5 correspond au nombre 1).
Il y a 5 branches principales, chacune d'elle est subdivisée en 3 branches secondaires, elles même subdivisées en 2 rameaux. Il y a donc 5 x 3 x 2 = 30 extrémités, donc

Problème 13 Solution rédigée :
A chaque fois qu'on effectue une brisure, le nombre de morceaux augmente de 1 (le morceau cassé disparait, mais deux nouveaux morceaux apparaissent). Pour séparer tous les carrés, c'est à dire pour obtenir 24 morceaux, il faut donc casser 23 fois.

Problème 14
Solutions rédigées pour la conversion en base 5 :
En base 5, on utilise des groupements par : 1 5 25 125 625 3125
Les groupements de plus grande taille utilisés pour le nombre 2315 sont des groupes de 625.
En divisant 2315 par 625, on obtient 2315 = 3 x 625 + 440
On obtient de la même façon successivement : 440 = 3 x 125 + 6565 = 2 x 25 + 15 15 = 3 x 5 + 0
On en conclut que 2315 = 3 x 625 + 3 x 125 + 2 x 25 + 3 x 5 + 0 x 1 2315 s'écrit donc $\overline{33230}$ en base 5



L'algorithme ci-contre, méthode classique, ne demande aucune justification supplémentaire.
2315 s'écrit donc $\overline{33230}$ en base 5
La conversion en base 4 s'effectue avec les mêmes techniques, 2315 s'écrit $\overline{210023}$ *en base 4.*

Yves Thomas, IUFM de l'université de Nantes, site de Nantes.

Problème 15.
Solution rédigée :
Soit n un des nombres cherchés, notons q et r le quotient et le reste de la division de n par 7
on a n = 7q + r   et comme q = 2r , n = 14 r + r = 15 r.
Or le reste d'une division par 7 peut valoir de 0 à 6, il y a donc 7 possibilités, dont l'une (r = 0 donc n = 0) ne convient pas car n est non nul par hypothèse.
Les valeurs possibles de n sont donc 15, 30 , 45, 60, 75 et 90.

Problème 16
Recherche et brouillon.
Essayez des triplets de nombres impairs : 5 ; 7 ; 9 puis 7 ; 9 ; 11… et observez pourquoi cela ne marche pas, cela devrait vous mettre sur la piste d'une solution, ou de la raison pour laquelle il n'y a pas de solutions.
Si cela ne suffit pas, lisez la réponse qui suit puis essayez de la mettre en forme.

Essayons quelques triplets de nombres impairs consécutifs
5 ; 7 ; 9 ne convient pas car 9 est divisible par 3
7 : 9 ; 11 ne convient pas car 9 est divisible par 3
9 ; 11 ; 13 ne convient pas car 9 est divisible par 3
11 ; 13 ; 15 ne convient pas car 15 est divisible par 3 (et par 5)
13 ; 15 ; 17 ne convient pas car 15 est divisible par 3 (et par 5)
15 ; 17 ; 19 ne convient pas car 15 est divisible par 3 (et par 5)
17 ; 19 ; 21 ne convient pas car 21 est divisible par 3 (et par 7)

On constate que de proche en proche, à chaque fois q'un multiple de 3 disparaît de la liste, le suivant apparaît dans la liste… on ne trouvera donc pas d'autre solution que 3 ; 5 ; 7

Solutions rédigées.
version élémentaire :
Quand on ajoute 6 à un multiple de trois, on obtient un multiple de 3.
Dans la liste des nombres impairs qui suit, les nombres écrits en gras sont donc multiples de 3 :
3 5 7 **9** 11 13 **15** 17 19 **21** 23 25 **27** 29 31 **33**
Parmi 3 nombres impairs consécutifs, il y en a toujours un qui est multiple de 3 et qui n'est donc pas premier (à l'exception de 3 lui même). Il n'y a donc pas d'autres triplets de nombres premiers que 3 ; 5 ; 7

version pompeuse :
Soit a un nombre impair, ses deux successeurs sont alors a + 2 et a + 4
Le reste r de la division de a par 3 peut être 0, 1 ou 2. étudions ce qui se passe dans chacun des cas.

Si r = 0, alors a est un multiple de 3
Si r = 1, alors a = 3k + 1, donc a + 2 = 3 k + 1 + 2 = 3 (k + 1).   a + 2 est alors multiple de 3
Si r = 2, alors a = 3k + 2, donc a + 4 = 3 k + 2 + 4 = 3 (k + 2).   a + 4 est alors multiple de 3

Dans tous les cas, un des trois nombres est multiple de 3, or le seul multiple de 3 qui soit premier est 3 lui même, il n'y a donc pas d'autre exemple de nombres premiers triplets que celui qui est cité dans le texte.

Problème 17   Recherche et brouillon.
Si on fait des essais avec des nombres plus simples, on constate par exemple que les multiples communs à 9 et 10 qui sont 90, 180, 270, 360… sont tous multiples de 90 en revanche les multiples communs à 8 et 10, qui sont 40, 80, 120… ne sont pas tous multiples de 80, seuls certains d'entre eux le sont.
La décomposition des nombres en facteurs premiers permet de mieux comprendre le phénomène :
9 = 3 x 3   10 = 2 x 5   8 = 2 x 2 x 2
Pour écrire sous forme décomposée un multiple commun à 9 et 10, on est obligé de prendre tous les facteurs de 9 et tous ceux de 10. En revanche, pour 8 et 10 , le facteur 2 étant présent dans les deux décompositions rien n'oblige à les prendre tous, on peut ne prendre que trois facteurs 2 sur les quatre existants, et on obtient 2 x 2 x 2 x 5 = 40 qui n'est pas multiple de 8 x 10.
cela revient à dire que si les nombres n'ont rien en commun dans leurs décompositions leur ppmc est le produit des deux nombres, alors que s'ils ont des facteurs communs, le ppmc est plus petit que le produit des deux nombres.

Solution rédigée :
52 = 2 x 2 x 13   91 = 7 x 13
Le nombre 2 x 2 x 7 x 13 est multiple de 52 et de 91 mais pas de 52 x 91.

Problème 18 Recherche et brouillon.

La «ressemblance» entre 6565 et 65 doit éveiller notre curiosité et faire remarquer que 6565 = 101 x 65, il reste alors à bricoler l'écriture de l'expression proposée $6565^2 - 6363^2$ pour essayer de faire apparaître l'expression $6565^2 - 6363^2$ sur laquelle il nous est donné un renseignement.

Solution rédigée :

6565 = 101 x 65 6363 = 101 x 63

On a donc $6565^2 - 6363^2 = (101 \times 65)^2 - (101 \times 63)^2$

$6565^2 - 6363^2 = 101^2 \times 65^2 - 101^2 \times 63^2 = 101^2 \times (65^2 - 63^2) = 101^2 \times 16^2 = (101 \times 16)^2$

$6565^2 - 6363^2$ est donc bien le carré d'un nombre entier.

Problème 19 Solution rédigée :

Appelons A le nombre cherché.

Le quotient de A par 21 est 32 ce qui signifie que $32 \times 21 \leq A < 33 \times 21$

donc $672 \leq A < 693$

Dans cet intervalle, seuls 675 et 684 sont divisibles par 9, ce sont donc les deux solutions du problème.

Problème 20 Solution rédigée :

Pour que le nombre soit le plus petit possible, il faut que les chiffres des rangs élevés (milliards…) soient petits, il faut donc les choisir tous égaux à 0, sauf le premier qui vaudra 1, sans quoi le nombre pourrait s'écrire avec moins de 10 chiffres. On écrit donc des zéros tant que ces possibles. Au rang des milliers on est contraint d'utiliser 2 car si on utiliser 0 ou 1, la somme des chiffres sera inférieure à 30.

Le plus petit nombre entier de 10 chiffres dont la somme des chiffres est 30 est donc 1 000 002 999.

Problème 21 Solution rédigée :

Notons $\overline{abc}$ le nombre entier qui s'écrit avec les trois chiffres a b et c

$\overline{abc} = 100 a + 10 b + c$ et $\overline{acb} = 100 a + 10 c + b$

On a donc 100 a + 10 c + b = 100 a + 10 b + c + 36 d'où on tire : 9c – 9 b = 36 donc c – b = 4 ou c = b + 4

$\overline{abc} = 100 a + 10 b + c$ et $\overline{bac} = 100 b + 10 a + c$

On a donc 100 b + 10 a + c = 100 a + 10 b + c + 270

D'où on tire : 90b – 90a = 270 donc b – a = 3 ou b = a + 3 et donc c = a + 7

$\overline{abc}$ vaut donc 148 ou 259 (si a était supérieur à 2, c serait supérieur à 9 ce qui est impossible).

$\overline{abc}$ n'est donc pas divisible par 9.

Problème 22 Solution rédigée :

264 = 2 x 2 x 2 x 3 x 11 et 312 = 2 x 2 x 2 x 3 x 13

leur pgcd est donc 24, leurs diviseurs communs sont les diviseurs de 24, soit 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 : 8 ; 12 et 24

Problème 23 Solution rédigée :

Le reste de la division de A par 9 est 2, donc A = 9q + 2, ou q est un entier.

On a alors : 2A = 18q + 4 = 18q + 3 + 1 = 3 (6q + 1) + 1, ce qui montre que le reste de la division de 2A par 3 est 1

$A^2 = (9q + 2) (9q + 2) = 81 q^2 + 18q + 18q + 4 = 9 (9 q^2 + 4q) + 4$ ce qui montre que le reste de la division de A^2 par 9 est 4.

Problème 24 Solution rédigée :

Par définition, un nombre qui est le produit de deux nombres premiers n'est pas premiers (car il a ses deux nombres comme diviseurs en plus de un et lui même).

5, 23, 41 sont des exemples montrant qu'un nombre peut être premier quand la somme de ses chiffres est 5 (qui est multiple de 5)