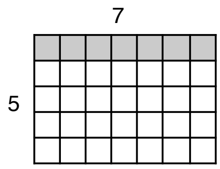
Calculs d'aires : le sens des formules

Cette fiche rappelle les principales méthodes de calcul d'aire utiles au CRPE.
N'hésitez pas, si les calculs d'aires vous posent problèmes, à refaire physiquement les manipulations indiquées et surtout à les refaire mentalement. Les formules devraient être plus faciles à retenir associées aux raisonnements qui leur donnent du sens.

1. **<u>Le rectangle</u>**.



Ce rectangle contient 5 rangées de 7 carreaux, son aire est 5 x 7, soit 35 carreaux.

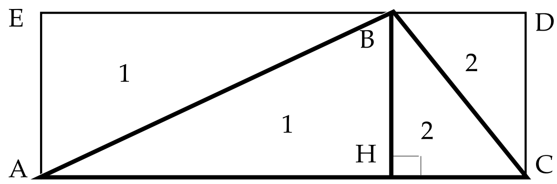
on retrouve la formule à la base de tous les calculs d'aires :

Aire du rectangle = Longueur x largeur

Cette explication n'est évidente pour des dimensions entières.
Le calcul de l'aire d'un rectangle dont aucune dimension n'est entière est au progamme de la classe de sixième et sert à introduire la multiplication de deux nombres décimaux.

2. **<u>Le triangle rectangle.</u>** On peut former un rectangle avec deux triangles rectangles identiques.

Chacun des deux triangles contient la moitié des carreaux du rectangle.
L'aire du triangle rectangle est égale à la moitié de celle du rectangle.



3. **<u>Le triangle quelconque.</u>**

Après avoir découpé ABC en deux triangles rectangles en traçant la hauteur [BH], on peu calculer son aire de deux façons :

a. Calculer la somme des aires des triangles rectangles ABH, et BCH.
b. Calculer l'aire de ACDE puis la diviser par 2 (car ABC recouvre la moitié du rectangle).

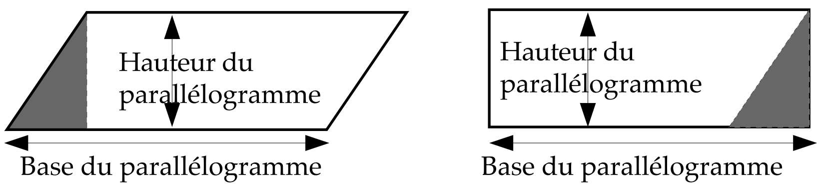
cette deuxième méthode correspond à la formule : Aire du triangle = $\dfrac{base \times hauteur}{2}$

Il n'existe pas de rectangle contenant entièrement ABC et ayant pour côté [BC].
On verra après le paragraphe sur les parallélogrammes pourquoi la formule ci-dessus est cependant correcte si on utilise le côté [BC] ou le côté [AB] comme base.

4. **<u>Le parallélogramme.</u>**

Toutes les méthodes reviennent à trouver un rectangle ayant la même aire que le parallélogramme.

a. Découpage du parallélogramme en deux parties assemblées pour obtenir le rectangle.



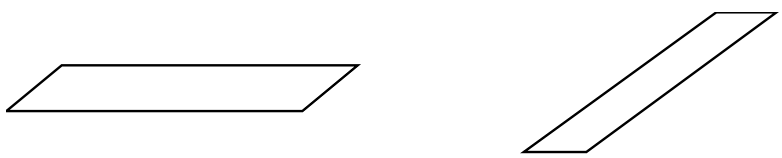
L'aire du parallélogramme est égale à celle du rectangle, on a donc :

aire du parallélogramme = longueur du rectangle x largeur du rectangle

ce qui devient en employant les termes qui se rapportent au parallélogramme:

aire du parallélogramme = base x hauteur

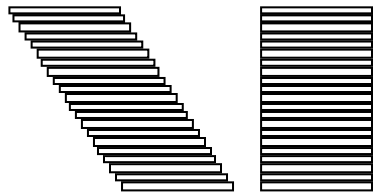
Cette façon de voir les choses n'est pas toujours applicable, suivant la forme et la position du parallélogramme, on semble souvent contraint d'utiliser comme base le plus grand côté du parallélogramme.



Yves Thomas, Olivier Rousseau, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes

Les méthodes suivantes, montrent pourquoi on peut aussi utiliser le petit côté comme base.

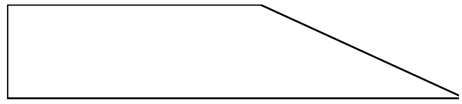
b. Découpage du parallélogramme en tranches minces.



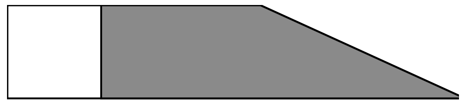
La figure de gauche découpée a la même aire que le rectangle de droite.
En imaginant des tranches beaucoup plus minces, la figure de gauche serait "presque" un parallélogramme.
Cette façon de transformer un parallélogramme en un rectangle qui a la même aire est valable pour toutes les formes et toutes les positions du parallélogramme.

c. Déplacement d'un trapèze.

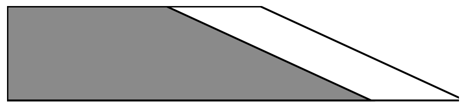
Dessinez un trapèze rectangle sur une feuille.



Découpez alors un trapèze en carton qui recouvre entièrement votre premier trapèze, sauf une partie rectangulaire à gauche.
L'aire de ce rectangle est égale la différence entre les aires des deux trapèzes.



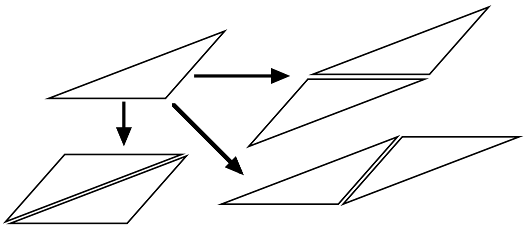
Faites glisser votre cache vers la gauche, la partie visible du grand trapèze est maintenant un parallélogramme.
L'aire de ce parallélogramme est la différence des aires des deux trapèzes.



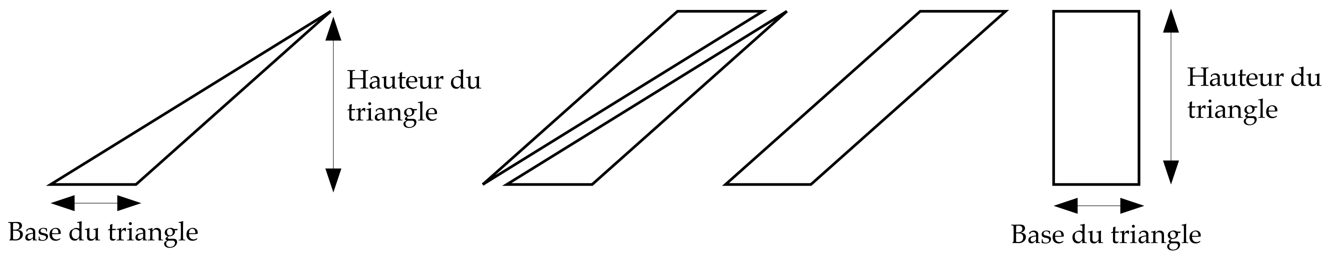
En rapprochant les deux phrases écrites en italique, on constate que le rectangle et le parallélogramme ont la même aire, ce qui permet de retrouver la formule établie par les méthodes de découpage.

5. **<u>Retour sur le triangle.</u>**

Avec deux triangles identiques on peut toujours former un parallélogramme (de trois façons différentes).

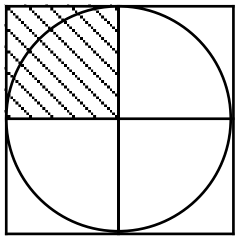


L'aire du triangle est égale à la moitié de l'aire de n'importe quel de ces trois parallélogrammes.



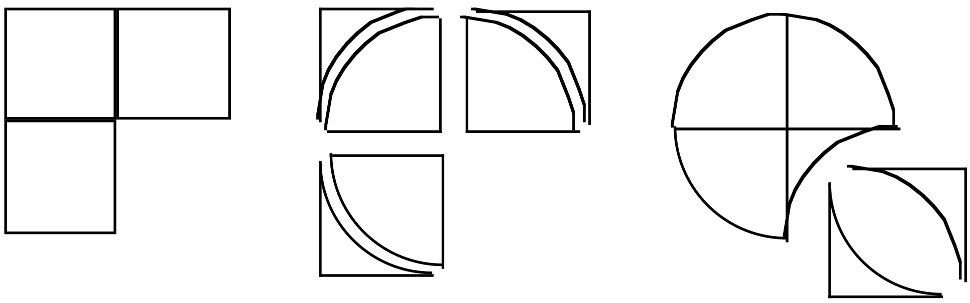
L'aire du triangle de gauche est égale à la moitié de l'aire du rectangle de droite. La méthode de calcul résumée par la formule Aire du triangle = $\frac{base \times hauteur}{2}$ peut s'appliquer en prenant comme base n'importe quel côté du triangle, ce que la méthode du paragraphe 3 ne permettait pas de savoir.

6. **Le disque.** On compare son aire à celle du carré qui a un côté égal au rayon
Si on appelle R le rayon du disque, l'aire de ce carré est R x R écrit en résumé R^2.



Le dessin ci contre montre que l'aire du disque est plus petite que $4 \times R^2$

La suite de schémas ci-dessous montre qu'avec trois carrés on peut presque reconstituer le disque.

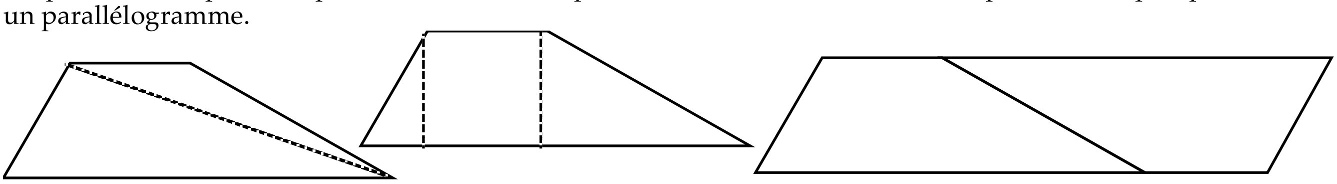


L'aire du disque est donc voisine de $3 \times R^2$
Il n'est pas possible de prouver simplement que le nombre proche de trois par lequel on multiplie l'aire du carré pour obtenir celle du disque est le célèbre nombre π . Il faut l'admettre et le retenir.

Aire du disque = π x R^2

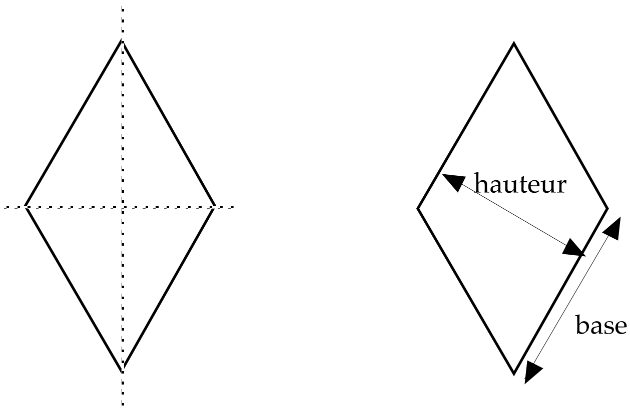
7. **les autres figures.** On découpe ou assemble pour retrouver les figures dont on sait calculer l'aire.

On peut le découper ce trapèze en deux ou trois parties, ou bien assembler deux trapèzes identiques pour obtenir un parallélogramme.



La troisième méthode correspond à la formule Aire du trapèze = $\frac{(petitebase+grandebase)\times hauteur}{2}$ *

On peut découper un losange en quatre triangles rectangles identiques, ou le traiter comme n'importe quel parallélogramme.



Le choix de la méthode dépendra de ce qui est connu dans le problème.