# Multiples et diviseurs, PPMC, PGDC

Toutes les expressions suivantes sont équivalentes:
40 est multiple de 5
40 est le produit de 5 par un nombre entier.
40 est dans la table de multiplication par 5
5 est un diviseur de 40
40 est divisible par 5
40 a pour reste 0 dans la division euclidienne par 5.

Pour ceux qui ont besoin d'une définition plus formelle :
**Un nombre entier a est multiple d'un nombre entier b si il existe un entier n tel que a = bn**

L'expression « 40 est divisible par 5» est parfois mal interprétée.
Elle ne signifie pas seulement qu'il est possible de diviser 40 par 5 (il est également possible de diviser 40 par 13, pourtant 40 n'est pas divisible par 13).

Des évidences bonnes à rappeler :
Un nombre entier positif a une infinité de multiples
Un nombre entier supérieur à 1 a au moins deux diviseurs : 1 et lui même.

Deux nombres particuliers à envisager avec méfiance et respect :
Le nombre 0 n'a qu'un multiple : lui même, mais tous les entiers sont diviseurs de 0
Le nombre 1 n'a qu'un diviseur : lui même, mais tous les entiers sont multiples de 1

**Décomposition en facteurs premiers.**
Selon le problème qu'on se pose, certaines façons d'écrire un nombre sont plus parlantes que d'autres.
Ecrire par exemple 252 sous la forme 2x100 + 5x10 + 2x1 est pratique pour certains problèmes.
Quand on s'intéresse aux multiples et aux diviseurs, écrire 252 sous la forme 2 x 2 x 3 x 3 x 7 est beaucoup plus utile.

**Un nombre premier est un nombre entier positif qui a exactement deux diviseurs : 1 et lui même.**
2 ; 3; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 sont les plus petits nombres premiers.

Tout nombre entier positif qui n'est pas premier peut se décomposer en un produit de facteurs premiers (par exemple 252 = 2 x 2 x 3 x 3 x 7) et cette décomposition est unique.

Deux remarques liées à l'unicité de la décomposition en facteurs premiers (qu'on admet ici sans la prouver) :
- C'est (entre autres) pour que la décomposition soit unique que les mathématiciens ont décidé de ne pas considérer 1 comme un nombre premier : si on acceptait 1 parmi les nombres premiers, 252 pourrait se décomposer en facteurs premiers de plusieurs façons, par exemple 252 = 1 x 1 x 1 x 2 x 2 x 3 x 3 x 7
- Puisqu'il n'existe qu'une décomposition en facteurs premiers de 49000, peu importe la façon dont on procède pour la chercher

$$49000 = 49 \times 1000 = 7 \times 7 \times 10 \times 10 \times 10 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7$$

C'est seulement quand le nombre ne présente pas de particularité évidente (564 ; 407832) qu'on décompose en posant les divisions par 2 autant que possible, puis par 3…

## Quelques questions classiques

**Trouver tous les diviseurs d'un nombre entier.**

Il est utile de se souvenir que quand on trouve un diviseur d'un nombre, on en trouve en réalité 2.
5 est diviseur de 40 parce que 40 = 5 x 8… ce qui indique que 8 est également un diviseur de 40.

Pour trouver tous les diviseurs de 360, on peut procéder par ordre croissant et noter en même temps les diviseurs «associés» (dans l'ordre décroissant) on trouvera ainsi 1 et 360 puis 2 et 180, 3 et 120.
Finalement, les diviseurs de 360 sont :

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 18 |
| 360 | 180 | 120 | 90 | 72 | 60 | 45 | 40 | 36 | 30 | 24 | 20 |

Cette recherche est facilitée si on a préalablement décomposé 360 en facteurs premiers :
360 = 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 5.
La décomposition rend évident que 7 ou 13 ne sont pas des diviseurs de 360
Elle permet de trouver facilement le diviseur associé : si on met en évidence le 8, la partie restante de la décomposition vaut 45. 360 = 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 5.

La recherche des diviseurs est facilitée par une certaine agilité en calcul mental…et est une bonne occasion de travailler le calcul mental. A l'étape ci dessous, on peut par exemple utiliser la colonne en gras pour trouver facilement le diviseur associé à 8 sans diviser 360 par 8 ni utiliser la décomposition en facteurs premiers.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | **4** | 5 | 6 | **8** |
| 360 | 180 | 120 | **90** | 72 | 60 | ? |

**Trouver le nombre de diviseurs d'un entier.**

Combien 360 a-t-il de diviseurs ?
Une méthode simple dans son principe mais parfois fastidieuse dans sa réalisation consiste à écrire tous les diviseurs puis à les compter : 360 a 24 diviseurs.

On peut aussi calculer le nombre de diviseurs sans les écrire tous, en s'appuyant sur la décomposition en facteurs premiers de 360.
360 = 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 5.      360 = 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 5.      360 = 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 5.
Sur chaque égalité précédente, la partie grisée de la décomposition de 360 est un diviseur de 360.
On peut trouver tous les diviseurs de 360 de cette façon, à l'exception d'un seul, le nombre 1.

De combien de façons peut-on choisir la partie grisée de la décomposition ?
Une façon de faire le choix consiste à se poser successivement les questions :
  Combien de facteurs 2 prend-on ?
  Combien de facteurs 3 prend-on ?
  Combien de facteurs 5 prend-on ?
Si on répond 1 facteur 2, 0 facteur 3, 1 facteur 5, on obtient le diviseur 10
Si on répond 0 facteur 2, 2 facteurs 3, 1 facteur 5, on obtient le diviseur 45
Si on répond 0 facteur 2, 0 facteur 3, 0 facteur 5, **on obtient le diviseur 1**

Ce processus de choix est souvent représenté par une arborescence : il y a 4 réponses possibles à la première question (0,1,2 ou 3).
Pour chacune de ces réponses, il y a 3 réponses possibles à la deuxième question (0,1 ou 2) et enfin 2 réponses possibles à la troisième question (0 ou 1).
Si on tient compte des trois questions, il y a donc 4 x 3 x 2 = 24 choix possibles c'est à dire 24 diviseurs.

**Trouver le plus grand diviseur commun (pgdc ou pgcd) à deux entiers.**
Tous les entiers ont le nombre 1 pour diviseur, deux entiers ont donc au moins un diviseur en commun, le nombre 1.
360 et 450 ont d'autres diviseurs en commun, par exemple le nombre 10. Quel est le plus grand d'entre eux ?

**Première méthode :** trouver tous les diviseurs de 360 et 450 puis observer les listes.
Diviseurs de 360 :

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | **2** | **3** | 4 | **5** | **6** | 8 | **9** | **10** | 12 | **15** | **18** |
| 360 | 180 | 120 | **90** | 72 | 60 | **45** | 40 | 36 | **30** | 24 | 20 |

Diviseurs de 450 :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | **2** | **3** | **5** | 6 | **9** | **10** | **15** | **18** |
| 450 | 225 | 150 | **90** | 75 | 50 | **45** | **30** | 25 |

On constate que le plus grand des diviseurs communs à 360 et 450 est 90
Cette méthode est peu économique. On peut remarquer que les autres diviseurs communs (en gras) sont les diviseurs du pgcd 90. Ceci peut sembler une coïncidence, la méthode suivante montrera que ce n'est pas le cas.

**Deuxième méthode :** s'appuyer sur les décompositions en facteurs premiers de 360 et 450.
360 = 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 5 450 = 2 x 3 x 3 x 5 x 5
Un diviseur de 360, c'est une partie de sa décomposition…il s'agit donc de trouver une partie la plus grande possible de la décomposition de 360, qu'on retrouve également dans 450
360 = 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 5 450 = 2 x 3 x 3 x 5 x 5
La partie grisée de chacune des égalités ci-dessus est le pgdc de 360 et 450… et il va de soi que si on prend une partie de la décomposition du pgdc, on obient un autre diviseur commun.

**Un cas particulier important :**
Cherchons le pgdc de 72 et 175
72 = 2 x 2 x 2 x 3 x 3 175 = 5 x 5 x 7
Il n'y a aucune partie commune aux deux décompositions en facteurs premiers, **le pgdc de 72 et 175 est donc 1** (et non 0 qui n'est diviseur d'aucun entier). Dans ce cas, on dit que 72 et 175 sont «premiers entre eux».

Il existe d'autres méthodes pour trouver le pgcd de deux nombres en particulier une méthode par divisions successives dite «algorithme d'Euclide» que vous pouvez trouver dans les manuels de 3ème.
Elle est utile quand les nombres en jeu sont grands et difficiles à décomposer en facteurs premiers ce qui n'est pas dans l'esprit du CRPE… à réserver donc à ceux qui ont déjà une bonne aisance en math et qui ne risquent pas la surcharge cognitive.

**Trouver le plus petit multiple commun (ppmc ou ppcm) à deux entiers.**
Exemple : trouver le ppmc de 360 et 450.

**Première méthode :** utiliser des listes (forcément incomplètes) de multiples
Les premiers multiples de 360 sont :
**0** 360 720 1080 1440 **1800** 2160 2520 2880 3240 **3600** 3960…
Les premiers multiples de 450 sont :
**0** 450 900 1350 **1800** 2250 2700 3150 **3600** 4050 4500 4950…
On constate que le plus petit multiple commun à 360 et 450 est 0, ce qui n'est guère surprenant puisque 0 est multiple de tous les nombres entiers. On a donc pris la mauvaise habitude de dire « petit multiple commun» alors qu'on devrait dire « petit multiple commun **non nul**».
La réponse attendue est donc : le petit multiple commun à 360 et 450 est 1800.
Cette méthode est totalement inutilisable si on cherche par exemple le ppmc de 1723473 et 8675042.

(on remarque au passage que ces nombres ont des multiples communs non nuls, par exemple
1723473 x 8675042 ou 1723473 x 8675042 x 17 )

**Deuxième méthode :** s'appuyer sur les décompositions en facteurs premiers de 360 et 450.

360 = 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 5 450 = 2 x 3 x 3 x 5 x 5

Puisque le nombre cherché est multiple de 360 (et non nul), il est de la forme 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 5 x k (avec k entier). Sa décomposition en facteurs premiers contient la décomposition de 360.
La décomposition du ppmc contient également la décomposition de 450.

Il s'agit donc de fabriquer un nombre, sous la forme de sa décomposition en facteur premier.
La décomposition doit contenir « 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 5», elle doit contenir « 2 x 3 x 3 x 5 x 5» et être la plus petite possible.

On constate alors que 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 5 x 5 = 1800 convient, c'est le ppmc de 360 et 450.