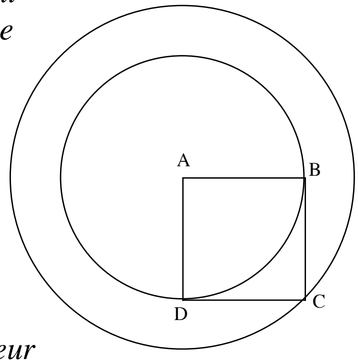
Problèmes à propos des aires…suite

1. *On considère un carré ABCD et les deux cercles de centre A qui passent respectivement par B et par C. Comparer l'aire du petit disque et celle de la couronne.*



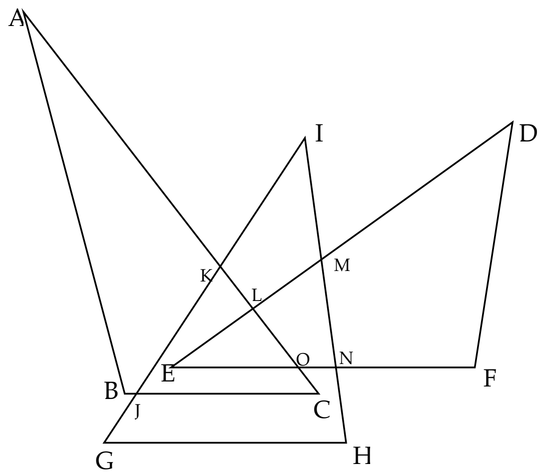
L'aire du petit disque est égale à π AB^2.
L'aire du grand disque est égale à π AC^2.
Or le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle isocèle ABC permet de montrer que AC^2 = 2 AB^2.
Il en résulte que l'aire du grand disque est le double de celle du petit disque et donc que l'aire de la couronne est égale à celle du petit disque.

2. *Donner si possible un exemple de triangle dont le périmètre est supérieur à 20 cm et l'aire inférieure à 2 cm^2*
   Donner si possible un exemple de triangle dont le périmètre est inférieur à 20 cm et l'aire supérieure ou égale à 15 cm^2.

Un triangle isocèle dont les côtés mesurent respectivement 10 cm, 10 cm et 0,2 cm répond à la première demande. Son périmètre est égal à 20,2 cm. La hauteur relative à la base mesure moins de 10 cm, par conséquent l'aire de ce triangle est inférieure à $\frac{0,2 \times 10}{2}$ cm^2 soit à 1 cm^2.

Un triangle isocèle de base 6 cm et dont la hauteur relative à la base mesure 5 cm répond à la deuxième demande.
Son aire mesure 15 cm^2.
Les côtés égaux, calculés à l'aide du thèorème de Pythagore, mesurent $\sqrt{34}$ cm, or $\sqrt{34} < 6$ le périmètre du triangle est donc inférieur à 18 cm.

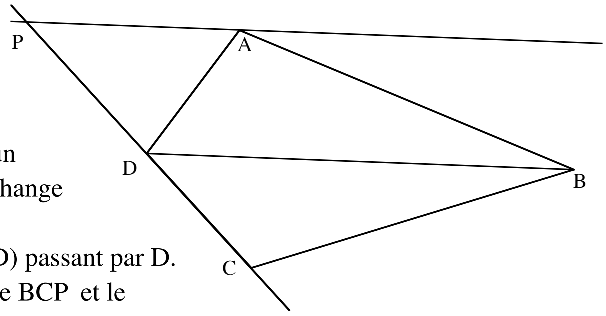
3. *Sur cette figure, les triangles ABC DEF et GHI ont des aires égales.*
   Trouver le plus possible de paires de polygones d'aires égales (on ne s'intéresse qu'aux polygones déjà dessinés sur la figure).



On peut citer les paires de polygones suivantes (liste non exhaustive):

- ALEOCB et DLOF (obtenus en retirant le triangle LEO respectivement à ABC et à DEF).
- ABCOEMIK et DMIKOF (obtenus en ajoutant le quadrilatère IKLM aux deux polygones précédents).
- ABCMLIK et DMIKLEF (obtenus en ajoutant le quadrilatère IKLM aux triangles ABC et DEF).
- IGHNEM et DMNF (obtenus en retirant MEN aux triangles IGH et DEF).
- ABJK et IKCJGH (obtenus en retirant CKJ à ABC et à IGH).

4. *On donne un quadrilatère non croisé quelconque ABCD, construire un triangle ayant une aire égale à celle de ABCD.*



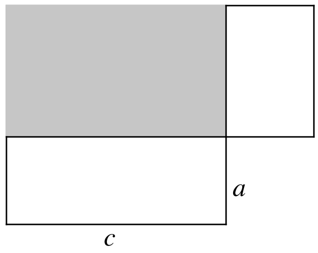
Une construction possible utilise le fait que si on déplace un sommet d'un triangle parallèlement à la base correspondante, l'aire de ce triangle ne change pas (puisque ni sa base ni sa hauteur ne changent).
On construit donc le point P, intersection de (DC) et de la parallèle à (BD) passant par D.
Les triangles BDP et BDA ont des aires égales, par conséquent le triangle BCP et le quadrilatère ABCD ont des aires égales puisqu'ils sont obtenus en ajoutant le triangle BCD respectivement à BDP et BDA.
Remarque : ce raisonnement n'est correct que si [BD] est à l'intérieur du quadrilatère ABCD, mais dans un quadrilatère non croisé, même concave, il y a toujours une des diagonales qui est à l'intérieur…il suffit de la nommer [BD].

Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.

5. *On donne un carré et un rectangle non carré ayant le même périmètre.*
   Expliquer pourquoi l'aire du carré est supérieure à celle du rectangle.

Version algébrique : appelons c le côté du carré. pour que le périmètre du rectangle soit égal à celui du carré, il faut que sa longueur et sa largeur mesurent respectivement c + a et c - a (a étant un nombre positif inférieur à c).
L'aire du rectangle mesure alors (c + a) (c - a) c'est à dire $c^2 - a^2$ ce qui est inférieur à l'aire c^2 du carré.

Version géométrique : La figure ci contre montre un carré de côté c et un rectangle dont les côtés mesurent respectivement c+a et c-a.
Chacune des deux figures peut être obtenue en ajoutant à la partie grisée un rectangle.
Pour obtenir le carré, il faut ajouter un rectangle de dimensions a et c.
Pour obtenir le rectangle, il faut ajouter un rectangle de dimensions a et c-a.
L'aire du carré est donc supérieure à celle du rectangle.



6. *La somme des longueurs des 12 arêtes d'un pavé droit est de 60 cm.*
   Deux de ses faces ont un périmètre de 16 cm, deux autres faces ont un périmètre de 20 cm.
   Calculer l'aire totale des faces de ce pavé.

Si on appelle a b et c les trois dimensions de ce pavé (en centimètres), les données peuvent se traduire par les trois équations suivantes :
4a + 4 b + 4 c = 60, d'où a + b + c = 15 pour la longueur totale des arêtes.
2a + 2b = 16 d'où a + b = 8 pour le périmètre d'une face.
2b + 2c = 20 d'où b + c = 10 pour l'autre face.
De a + b + c = 15 et a + b = 8 on tire que c = 7, on en déduit successivement que b = 3 et a = 5.
L'aire totale des faces de ce pavé est égale à 2 (ab + bc + ca) soit 2 (15 + 21 + 35) = 142
L'aire totale des faces de ce pavé est de 142 cm^2.

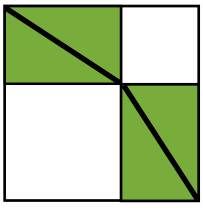
7. *L'affirmation suivante est-elle exacte ?*
   Si on roule une feuille rectangulaire pour obtenir un cylindre en assemblant deux côtés opposés, le volume de ce cylindre sera le même si on assemble les deux longueurs ou les deux largeurs. Justifier.

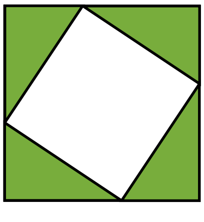
   Soit L la longueur de la feuille rectangulaire, et l sa largeur.
   Si on enroule la feuille de telle façon que la longueur du rectangle soit la hauteur du cylindre (la largeur du rectangle est alors le périmètre de la base du cylindre), le rayon r est alors égal à $\frac{l}{2\pi}$ et son volume s'obtient en calculant :

$$L \times \pi \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 = \frac{L \times l^2}{4\pi} = l \times \frac{L \times l}{4\pi}$$

   Pour calculer le volume en roulant dans le sens inverse, il suffit d'intervertir l et L, on obtient donc $L \times \frac{L \times l}{4\pi}$. En comparant les deux expressions, on voit que les volumes sont différents : le plus grand volume est obtenu quand la largeur du rectangle sert de hauteur pour le cylindre. L'affirmation de l'énoncé est donc fausse.

8. Expliquer en quoi les deux figures ci-contre permettent de démontrer le théorème de Pythagore.





   Si on considère que tous les triangles grisés sont identiques, l'aire blanche dans chacun des deux figures est obtenue en soustrayant l'aire de quatre triangles à l'aire d'un même carré. Les aire blanches sont donc égales.
   Or l'aire blanche de la figure de gauche est la somme des carrés des côtés de l'angle droit d'un des triangles rectangles. L'aire blanche de la figure de droite est le carré de l'hypoténuse du même triangle rectangle. CQFD.
   Pour être complet, il faudrait prouver que le quadrilatère «oblique» de la figure de droite est bien un carré. Il a quatre côtés égaux, mais il est moins évident de voir pourquoi il a un angle droit.

Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.