Problèmes à propos des aires

1. Combien peut-on découper de rectangles de 5 cm sur 7cm dans une feuille rectangulaire de 17 cm sur 24 cm ?

2. On donne un rectangle ABCD, construire un rectangle BDEF ayant la même aire que ABCD.

3. Partager un quadrilatère quelconque en deux parties d'aires égales.

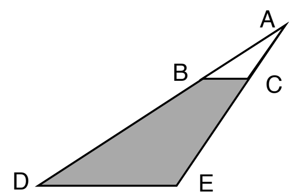
4. ABCD est un rectangle tel que AB = 13 cm et BC = 7 cm.
   R est le point de [BD] tel que BR = 12 cm.
   La parallèle à (AB) passant par R coupe (AD) en E et (BC) en F
   La parallèle à (AD) passant par R coupe (AB) en G et (DC) en H
   Comparez les aires des rectangles AGRE et FRHC

5. Tracer un triangle quelconque et ses trois médianes.
   Les médianes partagent le triangle en six petits triangles.
   Comparer les aires de ces six morceaux.

6. Sur une feuille quadrillée, on trace des quadrilatères non croisés dont les sommets sont situés sur les intersections du quadrillage. Dessinez 5 quadrilatères différents ayant tous pour aire un carreau.

7. ABCD est un rectangle.
   M est le milieu de [AD], N le milieu de [AB], et R celui de [DC].
   [BD] et [NC] se coupent en S.
   Comparer les aires des triangles DNS et BSC.
   Comparer les aires des quadrilatères MNBD et MNRD.

8. Sur papier quadrillé, peut-on tracer un carré dont l'aire est égale à l'aire de 10 carreaux et dont les sommets sont des nœuds du quadrillage ? Même question avec 13 carreaux puis 30 carreaux.



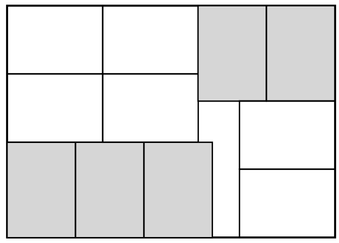
9. Le triangle ADE est obtenu par agrandissement du triangle ABC. le coefficient de l'agrandissement est 3. Sachant que l'aire de la partie grisée est 72 cm^2, déterminer l'aire du triangle ABC et celle du triangle ADE ?

10. Tracer un cercle de centre O et de rayon r.
    Tracer deux diamètres perpendiculaires, [AB] et [CD].
    Tracer le cercle de centre C et passant par A. Ce cercle coupe [CD] en E.
    Calculer l'aire de la lunule ADBE.

11. Tracer un hexagone régulier ABCDEF inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 4 cm.
    Quelle est la nature du quadrilatère ACDF ? Démontrer.
    Calculer l'aire de ACDF et celle de ABCDEF.

Problèmes à propos des aires, corrections et remarques.

Problème 1



Deux approches principales peuvent être utilisées :

- Faire des essais de dessin, qui permettent généralement de parvenir à une solution comme celle-ci, qui comporte 11 rectangles.

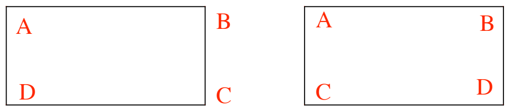
- Raisonner sur les aires :
  L'aire d'un rectangle est de 35 cm^2, l 'aire de la feuille est de 408 cm^2.
  11 x 35 = 385.   12 x 35 = 420. On ne peut donc pas découper 12 rectangles.

Chacune des deux approches est intéressante mais insuffisante :

- Réussir à placer 11 rectangles mais pas 12 n'est pas une preuve que 12 est impossible.
- Savoir que l'aire de la feuille est comprise entre 11 et 12 fois l'aire d'un rectangle ne prouve pas qu'on peut effectivement en placer 11.

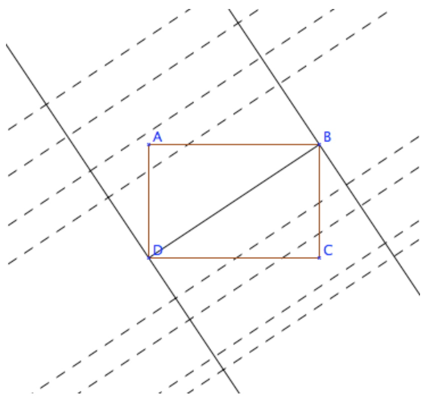
Suggestion de travail personnel : reprendre le même problème avec un rectangle de 24 cm x 18 cm.

Problème 2

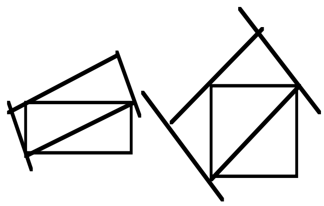


Par convention, pour nommer un polygone, on cite les sommets en tournant autour : le rectangle de gauche peut s'appeler ABCD, ADCB, BADC… Le rectangle de droite ne peut pas être nommé ABCD.

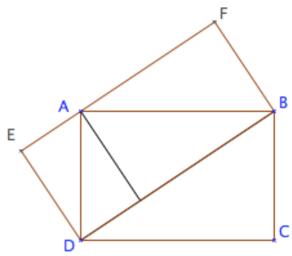
Des étapes fréquentes pour résoudre un problème de construction :



- Prendre un temps suffisant de découverte de l'énoncé.
  La diagonale [DB] du rectangle donné est un côté du rectangle cherché. Il y a donc deux côtés qui sont perpendiculaires à [DB], ils sont situés sur les droites tracées en trait fin.
  Le quatrième côté est une des droites parallèles à [DB] tracées en pointillés, nous devons trouver laquelle convient, (il y a en réalité deux solutions, une de chaque côté de la droite (DB)).
- Faire des "conjectures" à partir de ce qu'on voit sur la figure et les tester.
  En faisant se déplacer mentalement la droite en pointillés, on est conduit à s'interroger sur la position particulière où elle passe par A. Cette position fournit-elle la solution ? L'aire du rectangle tracé en choisissant cette position semble voisine de celle du rectangle de départ et ceci même si on déforme le rectangle de départ, ce qui est encourageant.



- Prouver que les suppositions qui résistent aux tests de l'étape précédente sont vraies.
  L'aire du rectangle ABCD est le double de celle du triangle rectangle ABC.
  L'aire du nouveau rectangle est également le double de celle du rectangle ABC (voir le découpage proposé dans la feuille sur les formules d'aires).
  Les deux rectangles ont donc bien la même aire.



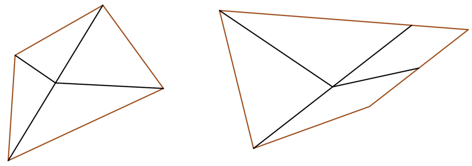
- Se donner un programme de construction de la figure, c'est à dire la succession d'étapes à réaliser pour la construire.
  Tracer les perpendiculaires à (BD) passant par B et par D
  Tracer la parallèle à (BD) passant par A. et F sont les intersections de cette droite et des deux précédentes.
- Procéder aux constructions.

Il est important de remarquer que les instruments ne sont utiles qu'à la fin du processus.

Suggestion de travail personnel : construire un rectangle ayant une aire égale à celle d'un quadrilatère quelconque donné.

Problème 3

Voici deux façons de partager un quadrilatère en deux parties d'aires égales. La première utilise le milieu d'une des diagonales du quadrilatère, la deuxième utilise un trapèze et les milieux de ses bases.



Suggestion de travail personnel : chercher une ou plusieurs méthodes pour partager un quadrilatère quelconque en quatre parties d'aires égales.

Problème 4

Méthode 1. Un rectangle est partagé par une de ses diagonales en deux triangles superposables. On a donc :

Aire (ABD) = Aire (CBD). Appelons X cette aire commune.
Aire (GBR) = Aire (FBR). Appelons Y cette aire commune.
Aire (EDR) = Aire (HDR). Appelons Z cette aire commune.

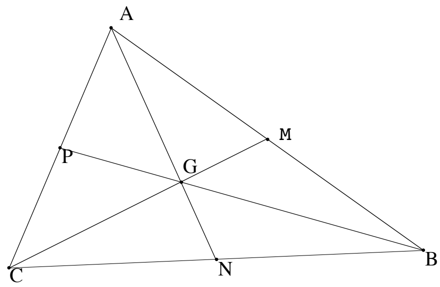
Chacun des deux rectangles étudiés peut s'obtenir à partir d'un grand triangle rectangle dont on enlève deux petits triangles rectangles, leurs aires sont toutes les deux égales à X – Y – Z.

Méthode 2. En utilisant le théorème de Thalès dans les triangles DRH et GRB, puis dans les triangles EDR et BRF, on peut montrer que $\frac{DR}{RB} = \frac{RH}{RG}$ puis que $\frac{DR}{RB} = \frac{ER}{RF}$. En rapprochant ces deux résultats on obtient $\frac{RH}{RG} = \frac{ER}{RF}$ d'où on tire $RH \times RF = RG \times ER$, ce qui montre l'égalité des aires des deux rectangles.

Remarque Il est également possible de résoudre ce problème en calculant les longueurs des côtés des rectangles à l'aide des théorèmes de Thalès et de Pythagore. C'est fastidieux et surtout moins général que les deux méthodes précédentes : la conclusion est-elle encore valable en changeant les mesures ?

Problème 5

En utilisant les notations indiquées sur la figure ci-contre :
Les triangles CNG et BNG ont des aires égales car ils ont des bases de même longueur et la même hauteur issue de G. appelons *a* l'aire commune à ces deux triangles.
Les triangles CPG et APG ont des aires égales car ils ont des bases de même longueur et la même hauteur issue de G. appelons *b* l'aire commune à ces deux triangles.
Par ailleurs, le triangle CNA a une aire égale à la moitié de l'aire de ABC, il en est de même de CPB.
CNA et CPB ont donc des aires égales, on a donc 2a + b = 2b + a, d'où a = b.



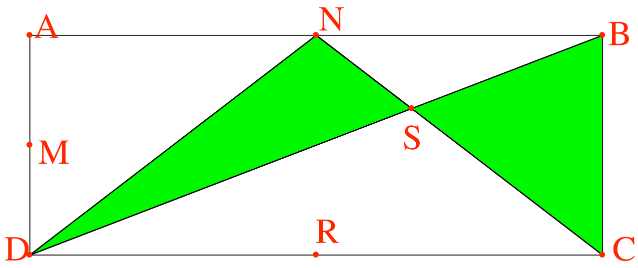
Les quatre triangles CNG, BNG, CPG et APG ont donc des aires égales. On montre de la même façon que les aires de AGM et BGM sont aussi égales aux précédentes.

Problème 6

Soit ABCD un carré coïncidant avec un carreau du quadrillage.
Voici deux façon d'obtenir sur le quadrillage une infinité de quadrilatère d'aire égale à 1 :
Remplacer le segment [AB] par un segment de même longueur situé sur la même droite. On obtient ainsi des parallélogrammes.
Remplacer A par un point A' situé sur la parallèle à (BC) passant par A.

Problème 7

Les triangles DNC et DBC ont la même base [DC] et des hauteurs égales, par conséquent ils ont des aires égales. Si on retire à chacun de ses triangles le triangle DCS, les parties restantes (c'est à dire les triangles DNS et BCS) ont donc également des aires égales.

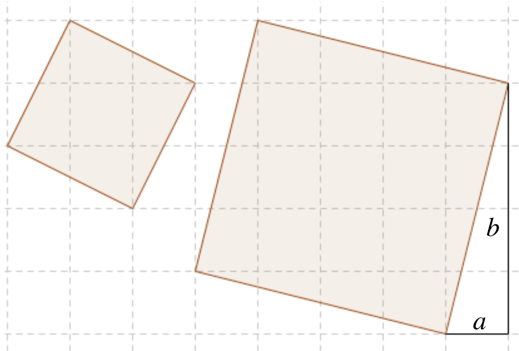


Le rectangles ADRN et le triangle ABD ont chacun une aire égale à la moitié de celle de ABCD. Si on enlève à ces deux figures le triangle AMN, on obtient les quadrilatères MNRD et MNBD, qui ont donc des aires égales.

Suggestion de travail personnel : Exprimer l'aire du triangle DNS en fonction de l'aire du rectangle ABCD.

Problème 8

Le fait que les sommets soient des nœuds du quadrillage n'impose pas que les côtés suivent les lignes du quadrillage.
Des carrrés comme ceux-ci doivent être envisagés :
Le Théorème de Pythagore permet d'affirmer que l'aire du carré est égale à $a^2 + b^2$
De plus, a et b sont des nombres entiers.
Il suffit donc d'essayer les petites valeurs entières pour a et b pour voir si il est possible d'obtenir les carrés demandés.



Pour $a = 1$ et $b = 3$ on obtient un carré d'aire 10.
Pour $a = 2$ et $b = 3$ on obtient un carré d'aire 13.
Il n'est pas possible d'obtenir un carré d'aire 30 car les valeurs possibles de a^2 et de b^2 (qui doivent être inférieures à 30) sont 1, 4, 9, 16, 25 et la somme de deux de ces nombres n'est jamais égale à 30.

Problème 9

la solution de ce problème nécessite une connaissance souvent utile (au programme du collège, donc du CRPE).

Dans un agrandissement de coefficient k, les aires sont multipliées par k^2

Ce qui peut également se formuler ainsi :

Dans un agrandissement, si les longueurs sont multpliées par un nombre k, les aires sont multipliées par k^2

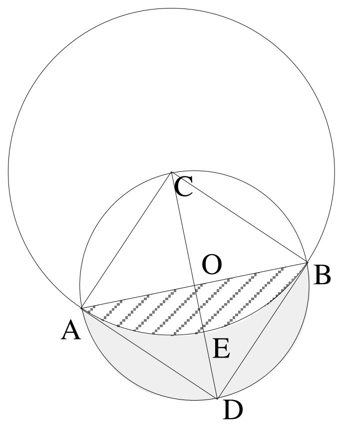
On a donc : aire (BCDE) = aire (ADE) – aire (ABC) = 9 x aire (ABC) – aire (ABC) = 8 x aire (ABC)

On en tire que aire(ABC) = aire (BCDE) / 8 = 9 cm^2
Aire (ADE) = 9 x aire (ABC) = 81 cm^2

Problème 10

L'aire de la lunule est égale à l'aire du demi-disque de diamètre [AB] moins l'aire hachurée.
L'aire hachurée est la différence entre l'aire d'un quart du grand disque, et celle du triangle ABC.
Dans la suite, on notera R le rayon du grand cercle. L'aire de la lunule est :

$$\frac{\pi r^2}{2} - \left(\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} \right)$$



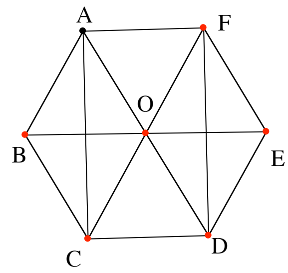
Le carré ACBD peut être décomposé en quatre triangles rectangles isocèles identiques à BOC, avec lesquels on peut former deux petits carrés. L'aire totale de ces deux petits carrés est égale à celle de ACBD. On a donc $R^2 = 2\ r^2$ (résultat qu'on peut aussi obtenir en appliquant le théorème de Pythagore au triangle rectangle BOC).

On peut donc remplacer R^2 par 2 r^2 dans l'expression de l'aire de la lunule afin de la simplifier.

$$\frac{\pi r^2}{2} - \left(\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2}\right) = \frac{\pi r^2}{2} - \left(\frac{2\pi r^2}{4} - \frac{2r^2}{2}\right) = \frac{\pi r^2}{2} - \frac{2\pi r^2}{4} + \frac{2r^2}{2} = r^2$$

L'aire de la lunule est égale au carré du rayon du petit cercle.

Problème 11



Le centre du cercle est aussi le centre de symétrie de l'hexagone régulier. Les diagonales du quadrilatère ACDF sont deux diamètres du même cercle, elles ont donc la même longueur et le même milieu, par conséquent, ACDF est un rectangle.

Appelons M le milieu de [OE]. Le quadrilatère OFED, dont les quatre côtés sont égaux, est un losange.
Comme OFED est un losange, ses diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu (donc M est aussi le milieu de [DF]).

Le triangle OFM est rectangle en M, on a donc :
$OF^2 = OM^2 + FM^2$; $16 = 4 + FM^2$; $FM^2 = 12$; $FM= \sqrt{12}$
Comme M est le milieu de [DF], on a donc $DF = 2\sqrt{12}$
On a donc, aire (ACDF) = 4 x $2\sqrt{12} = 8 \sqrt{12}$ *(Ce qui peut aussi s'écrire 16 $\sqrt{3}$)*

L'hexagone régulier contient 6 triangles équilatéraux, alors que le rectangle en contient 4.
L'aire de l'hexagone ABCDEF est donc égale à 6/4 de l'aire du rectangle, soit 12 $\sqrt{12}$ ou 24 $\sqrt{3}$