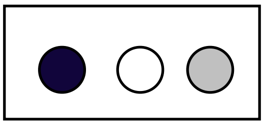
Initiation aux probabilités.



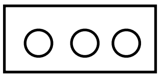
On place dans une boite trois boules identiques à l'exception de leur couleur :
une boule est noire, une est blanche, la troisième est grise.
On tire une des boules sans regarder, puis on la remet dans la boite, on agite pour mélanger les boules et on recommence.

Supposons qu'on fait 300 tirages
On ne serait pas surpris d'obtenir 105 boules noires, 102 boules blanches et 93 boules grises,
en revanche on serait fort étonné d'obtenir 280 boules noires, 18 blanches et 2 grises.

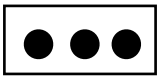
L'intuition suggère que si l'on fait de nombreux tirages, on tirera à peu près autant de fois chacune des boules, ce qu'on exprime en langage courant en disant «il y a une chance sur trois de tirer la boule noire».

La formulation mathématique de cette expression est «la probabilité de tirer la boule noire est 1/3»

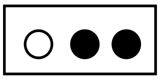
La probabilité de tirer une boule noire dans cette urne est égale à 0



La probabilité de tirer une boule noire dans cette urne est égale à 1

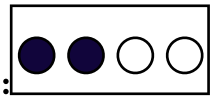


La probabilité de tirer une boule noire dans cette urne est égale à 2/3



Ce dernier exemple permet de faire une remarque essentielle :
Il n'y a que deux tirages possibles, *noire* ou *blanche*, mais la probabilité de chaque tirage n'est pas 1/2.
On ne peut pas déterminer la probabilité d'obtenir *noire* sans tenir compte du nombre de boules dans l'urne.
La référence a utiliser pour nos raisonnement sera «chaque boule a autant de chances d'être tirée que sa voisine» et non «chaque couleur a autant de chances d'être tirée».
Une autre façon de se convaincre de l'importance du nombre de boules est d'imaginer une urne contenant une seule boule noire et un million de boules blanches. Il n'y a toujours que deux tirages possibles, *noire* ou *blanche* mais il est évident qu'on est «presque sûr» de tirer une boule blanche, la probabilité d'obtenir *noire* n'est évidemment pas 1/2.

Premier problème :

On tire deux boules dans cette urne : 
Quelle est la probabilité que ces deux boules soient de la même couleur ?

Commençons par nous mettre d'accord sur ce qu'on entend par «tirer deux boules dans l'urne». On peut envisager plusieurs façons de tirer deux boules :

1. Prendre simultanément deux boules dans la main et les sortir de l'urne en une seule fois.
2. Prendre une boule, la poser à côté de l'urne puis en prendre une autre.
3. Prendre une boule, en noter la couleur puis la remettre dans l'urne avant de tirer la seconde boule.

Il est clair que le troisième procédé est nettement différent des deux premiers : imaginons qu'on tire trois boules avec ce procédé il est possible de tirer trois noires, ce qui est impossible dans les autres procédés.
Dans toute la suite de ce document, les tirages dont il est question sont toujours des tirages sans remettre les boules dans l'urne (procédés 1 ou 2).
L'intuition suggère que les deux premiers procédés sont équivalents. Supposons par exemple que l'on organise un jeu d'argent dans lequel on gagne 1€ si les deux boules tirées sont de la même couleur, rien n'incite à penser qu'on aura avantage à sortir les deux boules simultanément plutôt qu'une par une.

Première méthode, s'appuyant sur un tirage successif des deux boules.
Quand j'ai sorti une boule il reste trois boules dans l'urne : une est de la couleur déjà tirée, les deux autres sont de l'autre couleur. Comme j'ai autant de chance de tirer chaque boule, la probabilité de tirer la boule de la couleur déjà sortie est 1/3.

Deuxième méthode, s'appuyant sur un tirage simultané des deux boules.
Imaginons que les boules sont numérotées : 1 2 3 4 (les boules 1 et 2 étant noires).
Chacune des associations possibles de deux boules possède a priori autant de chances que les autre d'être tirée : la probabilité de tirer 1 et 3 est la même que celle de tirer 1 et 4 ou celle de tirer 3 et 4.

Quels sont tous les tirages possibles ? Dans le tableau qui suit, 13 signifie qu'on a tiré la boule numéro 1 et la boule numéro 3. Comme il revient au même de tirer la 3 et la 1, on a écrit pour chaque tirage les numéros des deux boules dans l'ordre croissant afin de ne pas faire de doublon.

1 2	1 3	1 4
	2 3	2 4
		3 4

L'inventaire de tous les cas possibles permet de constater qu'il y a 2 tirages favorables (même couleur) sur 6 tirages possibles, la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur est donc 2/6 ou 1/3.

Troisième méthode, proche de la précédente mais tenant compte de l'ordre du tirage. «Tirer la boule 1 puis la boule 3» est alors un événement différent de «tirer la boule 3 puis la boule 1»
Dans cette perspective l'inventaire des tirages possibles est :

	1 2	1 3	1 4
2 1		2 3	2 4
3 1	3 2		**3 4**
4 1	4 2	**4 3**	

L'inventaire de tous les cas possibles permet de constater qu'il y a 4 tirages favorables (même couleur) sur 12 tirages possibles, la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur est donc 4/12 ou 1/3.

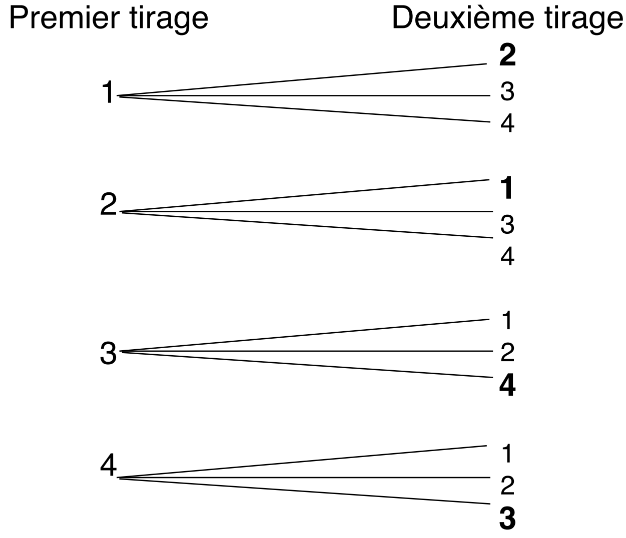
Cette méthode peut être rendue plus facile par une présentation graphique bien choisie des données.
Voici deux présentations possibles :

Par un tableau à double entrée.
Les «X» marquent les cases n'ayant pas de sens : on ne peut pas tirer deux fois la même boule.
Il reste 12 cases représentant les tirages possibles, parmi lesquelles 4 cases marquées «O» représentent les tirages favorables.

La probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur est donc 4/12 ou 1/3.

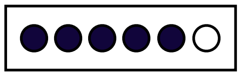
		tirage 1			
		1	2	3	4
tirage 2	1	X	O		
	2	O	X		
	3			X	O
	4			O	X

Par une arborescence dont chaque branche représente un tirage possible.



Les différentes méthodes conduisent au même résultat, ce qui confirme que les deux premières façons de tirer les boules décrites plus haut sont équivalentes. On peut donc choisir celle qui nous convient le mieux pour raisonner.

Deuxième problème :

On tire deux boules dans cette urne : 
Quelle est la probabilité que ces deux boules soient noires ?

Première méthode : en faisant l'inventaire de tous les cas possibles, sans tenir compte de l'ordre du tirage. Numérotons les boules de 1 à 6, la boule blanche étant représentée par le chiffre 6.

Les tirages possibles sont :

12	13	14	15	**16**
	23	24	25	**26**
		34	35	**36**
			45	**46**
				56

Cet inventaire permet de constater qu'il y a 5 cas défavorables (avec la boule blanche) sur 15 cas possible.
Il y a donc 10 cas favorables, la probabilité de tirer deux boules noires est donc égale à 10/15 soit 2/3.

Deuxième méthode : en faisant l'inventaire de tous les cas possibles et en tenant compte de l'ordre du tirage :
Comme pour le problème précédent, la liste des possibilités contient deux fois plus d'éléments que dans la méthode précédente : on doit compter 1-2 mais aussi 2-1.
On arrive alors à 20 cas favorables sur 30 cas possibles, la probabilité de tirer deux noires est alors 20/30 = 2/3

Remarque.
Considérons le tirage de la première boule : on a 5 chances sur 6 de tirer une noire (probabilité de 5/6).
Dans le cas ou le premier tirage est une boule noire, il reste 4 boules noires et une blanche dans l'urne, on a 4 chances sur 5 que le deuxième tirage donne à nouveau une boule noire (probabilité = 4/5).
On remarque que le produit de ces deux probabilités est $\frac{5}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{3}$

Le résultat est égal à la probabilité trouvée par les deux méthodes ci-dessus…est-ce un hasard ?

Pour comprendre ce qui se passe, on peut raisonner ainsi :
Dire que la probabilité d'obtenir une boule noire au premier tirage est 5/6 signifie qu'on tirera une boule noire dans à peu près 5/6 des tirages.
Le «à peu près» étant difficile à traiter en mathématique, nous alons faire comme si l'évènement se produisait **exactement** dans 5/6 des tirages, tout en sachant que c'est rarement le cas.

Raisonnons d'abord sur un exemple numérique.

Supposons qu'on effectue 6000 tirages. On obtiendra alors 5000 boules noires et 1000 blanches.

Quand la première boule tirée est blanche, comme il n'y a qu'une boule blanche, la deuxième est toujours noire. Parmi les 1000 tirages où la première boule est blanche, aucun n'aboutira à deux noires.

Parmi les 5000 tirages commençant par une boule noire, 4/5 d'entre eux c'est à dire 4000 se continueront par une boule noire. Il y a donc 4000 cas favorables sur 6000 tirages, ce qui correspond à une probabilité de 4000/6000 = 2/3

Reprenons le même raisonnement dans un cadre plus général

Supposons qu'on effectue n tirages. On obtiendra alors $\frac{5}{6}n$ boules noires et $\frac{n}{6}$ blanches.

Quand la première boule tirée est blanche, comme il n'y a qu'une boule blanche, la deuxième est toujours noire. Parmi les $\frac{n}{6}$ tirages où la première boule est blanche, aucun n'aboutira à deux noires.

Parmi les $\frac{5}{6}n$ tirages commençant par une boule noire, $\frac{4}{5}$ d'entre eux c'est à dire $\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}n$ se continueront par une boule noire.

Il y a donc $\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}n$ cas favorables sur n tirages, ce qui correspond à une probabilité de $\frac{4}{5}\times\frac{5}{6} = \frac{2}{3}$

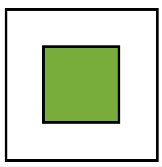
En conclusion, le fait que la probabilité de tirer deux noires soit le produit de la probabilité de tirer une noire en premier par la probabilité de tirer une noire en deuxième n'est pas du tout un hasard.
Cependant, cette propriété ne relève pas du tout du collège et n'est donc pas exigible au CRPE.

Si des questions du CRPE portent sur des probabilités, elles devraient pouvoir être résolues en utilisant, comme dans les exercices corrigés ci-dessus, la définition suivante de la probabilité d'un évènement :

Probabilité d'un évènement = (nombre de cas où il se produit) / (nombre total de cas possibles)

Autrement dit, si il y a 50 tirages possibles parmi lesquels 12 sont favorables, la probabilité est 12/50

Deux autres remarques concernant le concours:
Cette approche des probabilités se ramène à dénombres les cas possibles et les cas favorables, les problèmes de dénombrement travaillés dans l'année gardent donc plus que jamais leur pertinence.
L'un des sujets zéro plubliés par le ministère comporte une question qui n'est absolument pas dans l'esprit de l'initiation aux probabilités figurant dans les programmes de collège.
Il y est en effet dit que «<u>la probabilité qu'une fléchette tombe dans une zone donnée est proportionnelle à l'aire de la zone</u>». Il est peu probable que cela se reproduise car de nombreuses protestations sont remontées au ministère sur ce point (entre autres).
Inutile cependant pas paniquer si cela se reproduisait.
Imaginons par exemple que toutes les fléchettes tombent dans la cible ci contre, le texte souligné signifie simplement que si la zone centrale a une aire égale à un quart de l'aire totale il y tombera en moyenne un quart des fléchettes. La probabilité de toucher cette zone est alors 1/4.



Quelques exercices

On lance deux dés ordinaires.

- *Quelle est la probabilité pour que les deux dés aient la même valeur ?*
- *Est-il plus probable d'obtenir 6 au total des deux dés que d'obtenir 8 au total ?*
- *Quelle est la probabilité pour que les deux dés n'aient pas la même valeur ?*
- *Quel est la probabilité pour qu'au moins un des deux dés ait pour valeur 6 ?*

Dans un jeu de 32 cartes ordinaire, on ne conserve que les quatre rois et les quatre dames.

- *Parmi ces 8 cartes, on en tire deux. Quelle est la probabilité qu'aucune des deux ne soit un roi ?*
- *Parmi ces 8 cartes en en tire deux. Quelle est la probabilité que ce soient les deux pique ?*
- *Parmi ces 8 cartes en en tire deux. Quelle est la probabilité qu'il y ait un roi et une dame ?*

Quelques indications, données en supposant que le problème est traité à l'aide d'un tableau à double entrée (cf troisième méthode du premier problème résolu). bien entendu, l'utilisation d'un tableau n'est en rien obligatoire.

Il n'est pas obligatoire de dessiner réellement le tableau, ce n'est pas nécessaire pour déterminer le nombre de cases qu'il contient.

Le nombre de cas favorables peut souvent se déterminer également sans dessiner le tableau. Par exemple, les cas ou un des deux dés vaut 5 sont situés sur une ligne et sur une colonne.

Soyez attentif aux cases d'une des diagonales du tableau, celle qui correspond à deux valeurs égales.
Il n'est pas possible de tirer deux fois la dame de pique, mais il est possible de faire 6 et 6 aux dés.

Réponses non détaillées :
On lance deux dés ordinaires.
- *La probabilité pour que les deux dés aient la même valeur est 1/6*
- *La probabilité d'obtenir 6 au total des deux dés est 5/36, pour 8 au total c'est également 5/36 ?*
- *La probabilité pour que les deux dés n'aient pas la même valeur est 5/6*
- *La probabilité pour qu'au moins un des deux dés ait pour valeur 6 est 11/36*

Dans un jeu de 32 cartes ordinaire, on ne conserve que les quatre rois et les quatre dames. On tire deux cartes parmi ces huit.
- *La probabilité qu'aucune des deux ne soit un roi est 3/14*
- *La probabilité de tirer deux pique est 1/28*
- *La probabilité qu'il y ait un roi et une dame est 8/14*