Quelques exercices d'initiaition aux probabilités

On place dans un sac 10 pions. Sur chaque pion est écrit une des lettres suivantes :
A E I O U R S T N C. Les pions sont indiscernables au toucher.

On tire deux pions successivement, en remettant le premier dans le sac avant de tirer le second.

Quelle est la probabilité de tirer deux fois la même lettre ?
Quelle est la probabilité de tirer le mot «OU» dans l'ordre de son écriture ?
Quelle est la probabilité de tirer les deux lettres O, U, sans tenir compte de l'ordre ?
Quelle est la probabilité que les deux lettres tirées soient des voyelles ?
Quelle est la probabilité que parmi les lettres tirées, il y ait une voyelle et une consonne ?

On tire deux pions successivement, sans remettre dans le premier dans le sac.

Quelle est la probabilité de tirer deux fois la même lettre ?
Quelle est la probabilité de tirer le mot «OU» dans l'ordre de son écriture ?
Quelle est la probabilité de tirer les deux lettres O, U, sans tenir compte de l'ordre ?
Quelle est la probabilité que les deux lettres tirées soient des voyelles ?
Quelle est la probabilité que parmi les lettres tirées, il y ait une voyelle et une consonne ?

On tire 6 pions, sans remettre les pions tirés. Parmi les évènement suivants, quels sont ceux dont la probabilité est égale à 1, quels sont ceux dont la probabilité est égale à 0 ?

On tire deux fois la lettre A.
On ne tire que des consonnes.
On tire au moins une consonne.
Le nombre de voyelles tirées est le double du nombre de consonnes.
Il y a une consonne de plus que de voyelles.

On conserve d'un jeu de cartes ordinaire le 7 le 8 de chaque couleur.

On tire deux cartes au hasard parmi les huit dont on dispose.

Quelle est la probabilité que le 8 de pique figure parmi ces deux cartes ?
Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de deux carreaux ?
Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de deux 8 ?
Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un 7 et un 8 ?
Quelle est la probabilité que la somme des deux valeurs soit paire ?
Quelle est la probabilité que le produit des deux valeurs soit pair ?
Quelle est la probabilité que les deux cartes soient de la même couleur (carreau, pique, cœur ou trèfle) ?

On tire maintenant trois cartes au hasard parmi les huit dont on dispose.

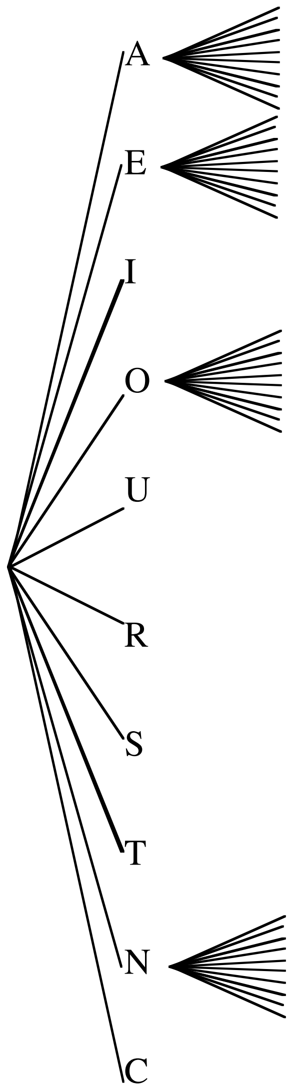
Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de trois trèfles ?
Quelle est la probabilité pour que le produit des valeurs des cartes **non tirées** soit pair ?
Quelle est la probabilité de tirer trois 8 ?
Quelle est la probabilité que les trois cartes soient de couleurs différentes ?

Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.

Corrigé des exercices d'initiation aux probabilités

Exercices pour lesquels on remet la première lettre dans le sac avant le second tirage.

Quel que soit le premier tirage, il y a une chance sur 10 de tirer la lettre qu'on vient de remettre, la probabilité d'avoir tirer deux fois la même lettre est 1/10.



On peut aussi représenter tous les évènements possibles par une arborescence esqissée ci contre.
Pour chacune des lettres obtenues au premier tirage, il y a 10 possibilités au deuxième tirage.
Parmi ces dix possibilités, il y en a une qui convient (le A si le premier tirage était A, le E si le premier tirage était E…) il y a donc en tout 10 évènements qui conviennent sur 100 évènements possibles, soit une probabilité de 1/10.

Le tableau ci-dessous constitue une autre représentation des données.
Les cases noircies représentent les issues favorables, il y en a 10 sur 100, soit une probabilité de 1/10.
On remarquera que la représentation sous forme de tableau est limitée au tirage de deux cartes (ce qui est le cas en principe au collège).

Second tirage

Premier tirage

	A	E	I	O	U	R	S	T	N	C
A										
E										
I										
O										
U										
R										
S										
T										
N										
C										

Tirer le mot OU dans l'ordre correspond à une seule branche de l'arborescence (ou une seule case du tableau), la probabilité est de 1/100.

Tirer les lettres O et U sans tenir compte de l'ordre correspond à deux cases ou deux branches, soit une probabilité de 2/100.

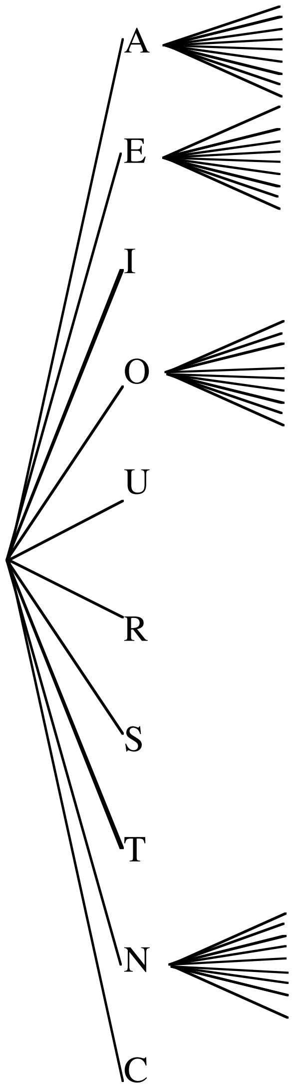
Les tirages de deux voyelles correspondent au quart haut à gauche du tableau (ou les 5 premiers rameaux des 5 premières branches) : 25 cases favorables sur 100, soit une probabilité de 1/4.

Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.

Il y a également une probabilité de 1/4 pour que les deux lettres tirées soient des consonnes (même raisonnement que pour les voyelles). Comme le probabilité d'obtenir un des évènements suivants : «deux consonnes», «deux voyelles», «une consonne et une voyelle» est égale à 1, la probabilité d'obtenir une consonne et une voyelle est 1 - 1/4 - 1/4 = 1/2.
On peut aussi dénombrer directement à l'aide de l'arborescence ou du tableau les cas correspondant à une voyelle et une consonne et constater qu'il y en a 50, soit une probabilité de 1/2.

Exercices pour lesquels on ne remet pas la première lettre dans le sac avant le second tirage.

On peut continuer à utiliser le tableau ou l'arborescence, avec les aménagements suivants.
Dans le tableau à double entrée, les cases coloriées sur une des diagonales correspondent à des évènements qui ne sont plus possibles (tirer deux fois de suite la même lettre) le nombre d'évènements possible est donc de 90.
Dans l'arborescence, il y a toujours 10 branches principales, mais chacune ne comporte que 9 rameaux car on ne peut pas tirer deux fois la même lettre.



On obtient alors les résultats suivants :
La probabilité de tirer deux fois la même lettre est 0
La probabilité de tirer «OU» dans l'ordre est 1/90
La probabilité de tirer O et U quel que soit l'ordre est 2/90
La probabilité de tirer deux voyelles est 20/90
La probabilité de tirer une voyelle et une consonne est 50/90

Questions sur les tirages de 6 pions sans remise.

Il est impossible de tirer deux fois la lettre A (probabilité = 0).
Il est impossible de ne tirer que des consonnes car il n'y en a que 5 (probabilité = 0).
On est certain d'avoir au moins une consonne puisqu'il n'y a que 5 voyelles (probabilité = 1).
Il est possible de tirer deux fois plus de voyelles que de consonnes (par exemple AEIORS) mais ce n'est pas certain (exemple AEIRST) la probabilité n'est ni 0 ni 1.
Il n'est pas possible qu'il y ait une consonne de plus que de voyelles (le nombre de lettres tirées serait alors impair, donc différent de 6) la probabilité est 0.

Questions à propos des tirages de cartes.

Deuxième carte

Première carte

	7♠	7♣	7♦	7♥	8♠	8♣	8♦	8♥
7♠								
7♣								
7♦								
7♥								
8♠								
8♣								
8♦								
8♥								

Les cases coloriées correspondent aux évênements impossibles : il y a 56 évènements possibles.

On peut là encore préférer utiliser une arborescence : 8 possibilités pour la première carte et 7 pour la seconde.

L'évènement «le 8 de pique figure parmi les deux cartes» correspond aux 7 cases de la ligne «8 de pique» et aux 7 cases de la colonne «8 de pique». La probabilité est donc 14/56 = 1/4.
En raisonnant par arborescence, les cas favorables sont les 7 rameaux de la branche «8 de pique» et le rameau «8 de pique» de chacune des 7 autres branches.

Tirer deux carreaux peut se faire de deux façons seulement : le 7 de carreau puis le 8 de carreau, ou le 8 de carreau puis le 7 de carreau, la probabilité est de 2/56 = 1/28.

La probabilité de tirer deux 8 est 12/56 = 3/14
La probabilité de tirer un 7 et un 8 est 4/7
La probabilité que la somme des valeurs soit pair est 3/7 (il faut tirer deux 8 ou deux 7)
La probabilité que le produit soit pair est 11/14 (les cas dévavorables sont ceux ou on tire deux 7)
La probabilité que les deux cartes soient de même couleur est 1/7

En tirant 3 cartes parmi les 8 :

La probabilité de tirer 3 trèfles est égale à 0 (il n'y a que deux trêfles disponibles).
La probabilité que le produit des valeurs des cartes non tirées soit paire est 1 (il reste au moins un 8, et le produit de 8 par n'importe quel entier est pair).
On ne peut plus utiliser un tableau avec trois tirages, en revanche la représentation par une arborescence convient encore. Il y a 8 branches principales, 7 branches secondaires par branche principale, et 6 rameaux par branche secondaire, soit 8 x 7 x 6 cas possibles.
Les cas dans lesquel on tire trois huit se situent sur 4 branches principales, et pour chacune d'entre elles sur 3 branches secondaires, et enfin pour chaque branche secondaire sur 2 rameaux.
La probabilité de tirer trois 8 est égale à $\dfrac{4\times3\times2}{8\times7\times6}=\dfrac{1}{14}$

La probabilité que les trois cartes soient de trois couleurs différentes est de 4/7

Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.