Problèmes et équations.

Pour chacun des problèmes ci-dessous, on essaiera de donner une solution algébrique (à l'aide d'une équation, d'un système d'équations, d'une inéquation…) mais aussi, **à chaque fois que possible**, une solution utilisant des raisonnements envisageables au cycle 3 de l'école élémentaire.

1 Pour équiper une classe, on achète 30 tables et 30 chaises. Une table coûte 44 € de plus qu'une chaise. La dépense totale est de 2640 €. Calculer le prix d'une chaise.

---

2 Comment partager une somme de 280 € entre 3 frères de la façon suivante:
- la part du cadet doit-être la moitié de celle de l'aîné.
- la part du plus jeune doit-être la moitié de celle du cadet.

---

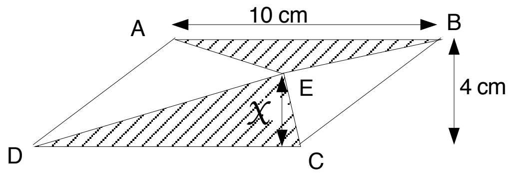
3 Dans une assemblée, quarante personnes ont plus de quarante ans, un quart de l'assemblée a entre trente et quarante ans et un tiers de l'assemblée a moins de trente ans. Quel est le nombre de personnes de cette assemblée ?

---

4 7 nombres entiers impairs consécutifs ont pour somme 1071. Quels sont ces nombres ?

---

5 ABCD est un parallélogramme et E un point quelconque situé à l'intérieur. AB = 10 cm. La hauteur relative à [AB] mesure 4 cm.

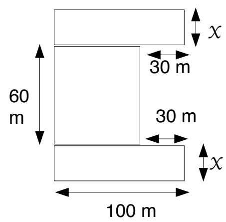


On désigne par X la mesure de la hauteur issue de E dans le triangle DEC

Quelle doit être la valeur de X pour que la mesure de l'aire hachurée soit égale à 20 cm^2 ?

---

6 La figure ci contre est le plan d'un terrain constitué de trois rectangles.



1) Calculer x pour que le périmètre du terrain dessiné soit 400 m.
2) Calculer x pour que l'aire du terrain dessiné soit 9000 m2

---

7 Deux avions partent à 9 heures des villes A et B situées à 4500 km l'une de l'autre
Le premier avion va de A vers B. Sa vitesse est de 1100 km/h.
Le second avion va de B vers A. Sa vitesse est de 900 km/h.
A quelle heure se croisent ils ?

---

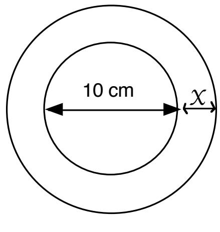
8 Même problème que le précédent, en changeant uniquement les heures de départ :
L'avion qui part de A décolle à 9 h et celui qui part de B à 10 heures.

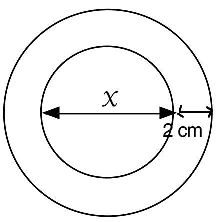
---

9 Si on ajoute 1 au numérateur d'une fraction, on obtient le même nombre que si on soustrait 3 à son dénominateur. Quelle est cette fraction ?

---

10 Quelle valeur faut-il donner à x pour que la différence entre la circonférence des deux cercles soit de 5 cm ? → →



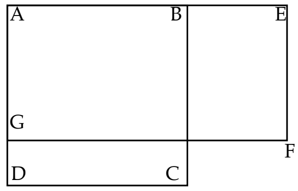


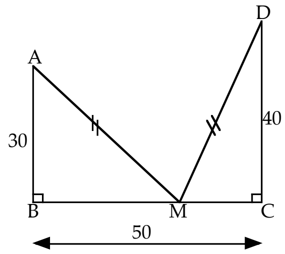
← 11 Quelle valeur faut-il donner à x pour que la différence entre la circonférence des deux cercles soit de 5 cm ?

12 Après avoir dépensé la moitié de mon argent, puis 100 €, puis le tiers de ce qui me restait, j'ai encore 73 €. Quelle somme avais-je au départ ?

13 Une moto et une voiture sont situées à 80 km l'une de l'autre et partent au même moment l'une vers l'autre. La vitesse de la moto est supérieure de 10 km/h à celle de la voiture. Les deux véhicules se rencontrent après avoir roulé pendant 25 minutes.
Quelle est la vitesse de la voiture ?

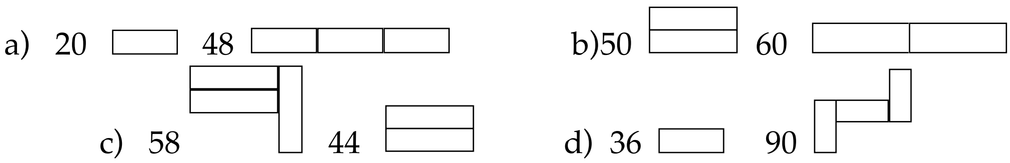
14 L'aire du carré ABCD est égale à l'aire du rectangle AEFG.
BE = 5 cm ; GD = 3 cm. Calculer la longueur du côté du carré. →





← *15 Les points B, M et C sont alignés.*
Calculer la longueur commune aux segments [AM] et [DM]

16 Dans les quatre exercices qui suivent, tous les petits rectangles dessinés dans un même exercice sont identiques. Le nombre écrit devant chaque figure est la mesure de son périmètre.
Dans chacun des 4 exercices, on demande la longueur et la largeur des petits rectangles.



17 550 personnes ont assisté à un spectacle.
Le prix de l'entrée est de 16 € pour les adultes. Les enfants paient demi-tarif.
La recette a été de 6960 €. Combien d'adultes et combien d'enfants ont-ils assisté au spectacle ?

18 Un enfant conserve les petites pièces. Il a en tout 9,45 € sous la forme de127 pièces, uniquement de 5 centimes et de 10 centimes. Combien y a-t-il de pièces de chaque sorte ?

19 Jacques est trois fois plus âgé que Louis.
Dans 12 ans, l'âge de Jacques ne sera que le double de celui de Louis.
Quel âge a Jacques ?

20 Si j'augmente un nombre de 5, son carré augmente de 295. Quel est ce nombre ?

21 *Dans un pavage, Un sommet est commun à trois polygones réguliers.*
L'un des trois polygones a 3 côtés, le deuxième en a 10.
Quel est le nombre de côtés du troisième polygone ?

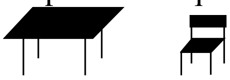
22 *Un train effectue un parcours de 300 km. Si sa vitesse moyenne augmentait de 20 km/h, le trajet durerait 10 minutes de moins. Quelle est la vitesse moyenne de ce train ?*

Problèmes et équations : corrigé.

Version utilisant une seule équation :
Soit c le prix d'une chaise, alors le prix d'une table est c + 44 et on a :
30 c + 30 (c + 44) = 2640
on en déduit que c = 22 : une chaise coûte 22€ et une table 66€

Version utilisant un système de deux équations :
Soit c le prix d'une chaise et t le prix d'une table, on a alors : $\begin{cases} t=c+44 \\ 30c+30t=2640 \end{cases}$ La méthode de résolution la plus simple est alors la méthode dite par substitution : puisque t = c + 44, on peut dans la deuxième équation remplacer t par c + 44.
On remarque qu'on obtient alors exactement la même équation que dans la première méthode.

Version utilisant des raisonnements de l'école élémentaire :
On peut faire 30 paquets d'une chaise et une table
Le prix de chaque paquet est : 2640 : 30 = 88 €


→88€ Une table coûte 44 € de plus qu'une chaise, on peut donc remplacer la table par une chaise et une enveloppe contenant 44 €, ça ne change pas le prix total.

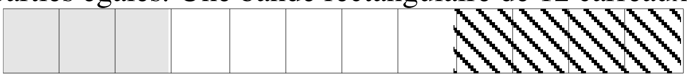
→ 88€ on en déduit que deux chaises coûtent 44€, donc une chaise 22 €

Les frères reçoivent respectivement 160, 80 et 40€.

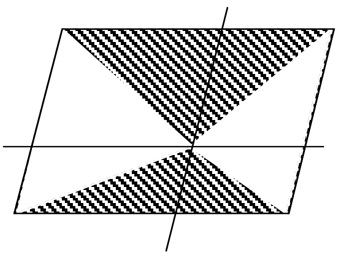
Version utilisant des raisonnements de l'école primaire : la part du cadet est le double de celle du plus jeune, la part de l'aîné est le double de celle du cadet. Représentons par un carré la part du plus jeune :
Part du plus jeune : □ part du cadet : □ □ part de l'aîné : □ □ □ □
Pour trouver la part du plus jeune, il suffit donc de diviser la somme totale par 7.

L'assemblée compte 96 personnes.

Version utilisant des raisonnements de l'école primaire : On parle du quart de l'assemblée, et du tiers de l'assemblée, il est donc judicieux de représenter l'assemblée par un graphique facile à partager en quatre parties égales ou en trois parties égales. Une bande rectangulaire de 12 carreaux de long convient.



La partie grisée représente les 30-40 ans, la partie hachurée les moins de 30 ans, la partie blanche représente donc les plus de 40 ans. On en déduit que chaque carreau représente 8 personnes, et que l'assemblée en comporte 96.



En traçant les parallèles aux côtés qui passent par le point de contact des deux zones grisées, on met en évidence que l'aire de la zone grisée est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme. Avec les dimensions données dans l'exercice, l'aire mesure donc 20cm^2, pour toutes les positions de E.

Si on met le problème en équation, on obtient $\frac{10x}{2} + \frac{10(4-x)}{2} = 20$

En transformant cette équation on obtient une égalité du type 20 = 20.
Il n'y a pas de difficulté de calcul, mais une difficulté d'interprètation.
Résoudre une équation, c'est trouver la ou les valeurs de l'inconnue pour lesquelles l'égalité écrite est vraie. Il est clair que 20 = 20 est une affirmation qui est vraie quelle que soit la valeur de *x*, donc toutes les valeurs de *x* compatibles avec le problème sont solution (tous les nombres compris entre 0 et 4).

---

x doit valoir 5 pour que le périmètre soit 400 m, et 24 pour que l'aire soit 9000 m^2

Les avions se rejoignent à 11 heures 15 min
Intéressons nous à la distance totale parcourue par les deux avions :
Cette distance est de 2000 km en une heure, donc de 4000 km en 2 h,
1000 km en une demi heure, et 500 km en un quart d'heure.
Pour que la distance totale parcourue soit 4500 km, il faut donc deux heures et quart.

Soit t la durée du trajet de l'avion qui part de B. On a alors $900t + 1100(t-1) = 4500$ d'où t = 1,7
La durée du de l'avion partant de B trajet est donc 1 h 42 min, les avions se croisent à 11 h 42 min

---

Soit a le numérateur de la fraction, et b son dénominateur (b>3), le problème se traduit par : $\frac{a+1}{b} = \frac{a}{b-3}$
Après simplification, on obtient $b = 3a + 3$, ce qui ne permet pas de déterminer une solution unique, mais fournit une façon simple de calculer b en fonction de a. Il y a une infinité de fractions qui répondent à la question, toutes celles dont le numérateur a et le dénominateur b vérifient $b = 3a + 3$
Parmi ces solutions, on a : 1/6 ; 2/9 ; 3/12….
Remarquons qu'il y a une ambiguïté, dans la question (qu'on retrouve dans certains sujets de CRPE) : on ne cherche pas un nombre, mais une écriture particulière de ce nombre sous forme d'une paire de deux entiers, en effet, 3 et 12 constituent à eux deux une solution, mais pas 1 et 4…. Alors que 3/12 = 1/4.

Exprimons en fonction de x la différence entre les deux circonférences.
Pour la figure de gauche on obtient D = 4 π pour celle de gauche on obtient D = 2 π x
On voit que cette différence ne vaudra jamais 5 sur la figure de la question 11 puisqu'elle ne varie pas avec x. Pour la figure de la question 10, la différence est de 5 si $x = 5 / 2\pi$.

Au départ, j'avais 419 €.
Version utilisant des raisonnements de l'école primaire : à la dernière étape, j'ai dépensé un tiers de ce que j'avais, le reste de 73€ est donc deux tiers de ce que j'avais. Donc un tiers de ce que j'avais vaut 36,5€ et j'avais 109,5€. A l'étape précédente j'avais donc 209,5€ et au début j'avais le double, 419€.

Si on note v la vitesse de la voiture, le problème peut se traduire par $\frac{25}{60}v + \frac{25}{60}(v+10) = 80$
On en déduit que la vitesse de la voiture est de 91 km/h

Le côté du carré mesure 7,5 cm.

Si on prend comme inconnue la longueur AM, on n'aboutit pas. On peut en revanche calculer BM.
L'équation s'obtient en écrivant que $AM^2 = MD^2$ puis en utilisant le théorème de Pythagore dans les deux triangles rectangles. Reste à penser que MC = 50 – BM pour se ramener à une équation du premier degré à une seule inconnue. Ayant BM, le théorème de Pythagore permet de calculer AM.
On obtient BM = 32, et AM = MD = $\sqrt{1924}$

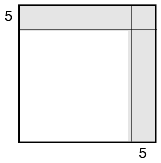
---

exercice a) L = 7 ; l = 3
Version utilisant des raisonnements de l'école primaire : pour faire le tour de la figure de gauche, je parcours deux largeurs et deux longueurs. Pour celle de droite je parcours deux largeurs et 6 longueurs. Ce sont les 4 longueurs supplémentaires qui mesurent 28 cm (différence des deux périmètres).
Exercice b) L = 35/3 ; l = 20/3 Exercice c) L = 12 ; l = 5 Exercice d) L = 13,5 ; l = 4,5

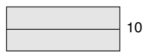
Il y avait 320 adultes et 230 enfants
Version utilisant des raisonnements de l'école primaire : Si les 550 spectateurs étaient tous des enfants, la recette serait égale à 550 x 8 = 4400 €. En réalité, on a encaissé 6960 €, c'est à dire 2560 € de plus.
A chaque fois qu'on remplace un enfant par un adulte, la recette augmente de 8 €
Pour la faire augmenter de 2560 €, il faut un nombre d'adultes égal à 2560 / 8 = 320.

Il y a 62 pièces de 10 centimes, et 65 pièces de 5 centimes. Ce problème peut se traiter comme le précédent, mais si on le met en équation, il faut exprimer tous les prix en € ou tous en centimes.

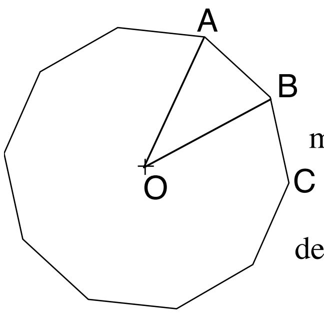
Jacques a 36 ans, Louis en a 12. Dans 12 ans ils auront respectivement 48 et 24 ans.
L'énoncé du problème est parfois jugé paradoxal, à cause d'une confusion entre différence et rapport. Quand deux personnes vieillissent, la différence de leurs âges reste constante, mais il n'en est pas de même du rapport de leurs âges, qui varie en se rapprochant progressivement de 1.



Le nombre est 27. Si on considère le carré d'un nombre comme l'aire du carré qui a ce nombre comme mesure du côté, il s'agit de trouver l'aire du carré blanc, sachant que l'aire hachurée est 295 cm^2 En enlevant le petit carré de 25 cm^2, et en plaçant côte à côte les deux rectangles restants on obtient la figure suivante :



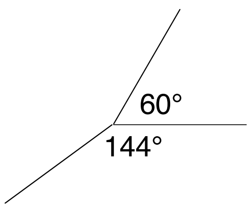
Comme son aire est 270 cm^2, sa longueur, égale au côté du carré blanc est 27 cm.



Un polygone régulier est inscrit dans un cercle, il peut se découper en triangles isocèles tous identiques. L'angle de sommet O dans chacun de ces triangles mesure 360 / n (si n est ne nombre de côtés).
La somme des deux angles à la base est alors 180 – 360/n
Chaque angle du polygone mesure également 180 – 360/n car c'est la somme de deux angles à la base de deux triangles voisins.

On obtient donc, pour n = 3 l'angle du polygone est 180 – 360 / 3 = 180 – 120 = 60, ce qui constitue une vérification de la formule, car les angles des triangles équilatéraux mesurent bien 60°

Pour n = 10, l'angle du décagone est égal à 180 – 360 / 10 = 180 – 36 = 144°



Le schéma ci contre montre le point commun aux trois polygones.
L'angle du troisième polygone mesure donc 360 – (60 + 144) = 156°
On a donc 180 –360 / n = 156 d'où l'on tire que n = 15.
Le troisième polygone régulier a 15 côtés.

En cherchant à mettre en équation ce problème, on obtient une équation du second degré, que l'on ne peut pas résoudre avec les outils du CRPE.
Des essais conduisent assez rapidement à constater que la vitesse du train est 180 km / h. La duré du trajet est alors de 1 h 40 min, alors qu'à 200 km / h elle serait de 1 h 30 min, soit un gain de 10 minutes.