Problèmes où intervient la proportionnalité.

14 pains au chocolat coûtent 16 € et 10 centimes, combien coûtent 21 pains au chocolat ?

Une automobile parcourt 14 mètres en une seconde. En combien de temps parcourt-elle 63 mètres ?

Jean a préparé de l'eau sucrée en versant 40 g de sucre dans 100 cl d'eau
Pierre et Louis doivent préparer pour une expérience une eau aussi sucrée que celle de Jean.
Le récipient de Pierre contient 150 cl d'eau, celui de Louis contient 225 cl d'eau.
Combien doivent-ils mettre de sucre ?

Dans une école de 100 élèves, on a reçu 150 cahiers et 225 crayons. La directrice veut répartir ce matériel équitablement entre les différents niveaux. Que donnera-t-elle aux élèves de CM, qui sont 40 ?

120 feuilles de papier vertes ont une épaisseur de 25 mm
160 feuilles rouges ont une épaisseur de 31 mm.
Le feuilles rouges sont-elles plus épaisses ou moins épaisses que les vertes ?

Deux voitures partent à 9 heures l'une vers l'autre. les points de départ sont éloignés de 100 km. L'une des voitures roule à la vitesse constante de 75 km/h, l'autre à la vitesse de 60 km/h. A quelle heure se croisent-elles ?

Louis et Jacques commencent en même temps à ranger des caisses. Ils rangent chacun autant de caisses. Louis range 40 caisses par heure, et Jacques 50 caisses par heure.
Louis termine son travail à 11 heures 45, Jacques termine le sien à 11 heures 30.
A quelle heure ont-ils commencé ?

Après avoir augmenté de 10%, puis diminué de 20%, un prix est de 140,8 €.
Quel était le prix initial ?

Un robinet A remplit une bassine en 9 minutes.
Un robinet B remplit la même bassine en 15 minutes.
Combien de temps faut-il pour remplir la bassine si on ouvre simultanément les deux robinets ?

La longueur d'un rectangle est le double de sa largeur. Si on augmente de 3 cm la longueur et la largeur de ce rectangle, son aire augmente de 180 cm^2.
Quelles sont les dimensions de ce rectangle ?

Deux villes A et B sont distantes de 30 km.
Un cycliste roulant à vitesse constante part de A à 10 h et arrive à B à 11 h 20.
Un autre cycliste part de B à 10 h 20 et arrive à A à 12 h.
A Quelle heure les deux cycliste se sont-ils croisés ?

Correction des problèmes où intervient la proportionnalité.

Chacun des problèmes peut se résoudre par de nombreuses méthodes différentes.
Ce corrigé propose deux méthodes par problème, ce qui ne signifie absolument pas que ces méthodes sont supérieures aux autres.

Exercice 1 ***Méthode 1***

14 pains au chocolat coûtent 16 € et 10 centimes,
42 pains au chocolat coûte 48€ et 30 centimes (c'est le triple de 14 pains).
21 pains au chocolat coûtent 24€ et 15 centimes (c'est la moitié de 42 pains).

Méthode 2

Nombre de pains	14	7	21
Prix en €	16,10	8,05	24,15

21 pains au chocolat coûtent 24,15 €

Dans le tableau ci-dessus, les calculs effectués et les raisonnements ne sont pas explicités, ils pourraient l'être par exemple en présentant le tableau comme ci-dessous :

	a	b	c
Calcul utilisé		b = a : 2	c = a + b ou c = 3 x b
Nombre de pains	14	7	21
Prix en €	16,10	8,05	24,15

Exercice 2 ***Méthode 1***

L'automobile parcourt 14 m en une seconde, donc 7 m en 0,5 s et 63 m en 0,5 x 9 = 4,5 s.

Méthode 2

La durée nécessaire pour un mètre est 14 fois plus petite que pour 14 mètres, c'est $\frac{1}{14}$ de seconde. La durée pour 63 mètres est 63 fois celle pour mètre, c'est donc $\frac{63}{14} = \frac{9}{2}$ secondes.

Cette méthode, appelée « règle de trois » a l'avantage de s'adapter à de nombreux problèmes, en revanche elle conduit souvent à des complications de calcul inutiles.
Deux idées permettent de conserver des calculs raisonnables :

- *Ecrire les divisions sous formes de fractions plutôt que poser la division ($\frac{1}{14}$ n'étant pas un nombre décimal, la division ne « tombe pas juste »)*
- *Ne pas faire les calculs dans l'ordre du raisonnement : le raisonnement dit qu'il faut diviser 1 par 14 puis multiplier le résultat par 63, mais il est plus commode de commencer par multiplier 1 par 63 et de diviser ensuite le résultat par 14. Cela suppose d'être bien convaincu que les deux chaînes d'opérations donnent nécessairement le même résultat.*

Exercice 3 ***Méthode 1***

Volume d'eau en cl	100	50	25	150	225
Masse de sucre en g	40	20	10	60	90

Pierre doit mettre 60 g de sucre pour 150 cl d'eau, Louis doit mettre 90 g de sucre pour 225 cl d'eau.

Méthode 2

Pour 100 cl d'eau, il faut 40 g de sucre donc :
Pour 1 cl d'eau, il faut 40/100 g de sucre,

pour 150 cl il faut $\frac{40}{100} \times 150 = \frac{40 \times 3}{2} = 60$ g de sucre,

pour 225 cl d'eau il faut $\frac{40}{100} \times 225 = \frac{40 \times 9}{4} = 90$ g de sucre.

***Exercice 4* Méthode 1**

Les élèves de CM représentent 40/100, ou 2/5 de tous les élèves de l'école. si le matériel est partagé proportionnellement au nombre d'élèves, ils recevront donc 2/5 des cahiers et des crayons.
Les CM recevront 2/5 de 150 cahiers, c'est à dire 60 cahiers.
Les CM recevront 2/5 de 225 crayons, c'est à dire 90 crayons.
Ces calculs permettent de résoudre le problème précédent, mais leur sens est alors beaucoup moins évident.

Méthode 2

Nombres d'objets pour l'école	100	50	25	150	225
Nombre d'objets pour les CM	40	20	10	60	90

Il s'agit exactement du même tableau que pour l'exercice précédent, mais les titres des lignes, qui désignent les grandeurs en jeu, sont plus difficiles à trouver, ce qui rend cette méthode plus difficile ici.

***Exercice 5* Méthode 1**

480 feuilles vertes ont une épaisseur de 100 mm (quatre fois plus que pour 120 feuilles).
480 feuilles rouges ont une épaisseur de 93 mm (trois fois plus que pour 160 feuilles).
Les feuilles rouges sont donc moins épaisses que les vertes.
Cette méthode s'appuie sur le calcul mental : elle suppose de remarquer rapidement qu'il est facile de trouver un multiple commun à 120 et 160.

Méthode 2

On trouve l'épaisseur d'une feuille verte en divisant 25 par 120, c'est environ 0,208 mm.
On trouve l'épaisseur d'une feuille rouge en divisant 31 par 160, c'est environ 0,193mm.
Une feuille rouge est donc moins épaisse qu'une feuille verte.
Ce problème est un des rares ou le fait de poser une division dont le résultat « ne tombe pas juste » n'est pas gênant, cela n'empêche pas de conclure. En revanche, ce serait une mauvaise idée si l'on voulait calculer l'épaisseur de 500 feuilles vertes.

***Exercice 6* Méthode 1**

En une heure, les voitures parcourent en tout 135 km.
Elles se croisent quand elles ont parcouru à elles deux 100 km.
La durée nécessaire pour parcourir 100 km est $\frac{100}{135}$ d'heure.

L'heure du croisement est donc $9 + \frac{100}{135}$ h.

$\frac{100}{135} = \frac{200}{270} = \frac{20}{27}$. Si on convertit en secondes, on obtient :

$\frac{20}{27} h = \frac{20}{27} \times 60 \text{ min} = \frac{400}{9} \text{ min} = 44 \text{ min} + \frac{4}{9} \text{ min}$. En convertissant enfin la fraction de minutes en secondes en obient enfin $\frac{4}{9} \text{ min} = \frac{4}{9} \times 60 s = \frac{80}{3} s \approx 26,7 s$

L'heure du croisement est donc environ 9 heures 44 minutes 27 secondes.

Méthode 2

En une minute, la voiture 1 parcourt 75/60 = 1,25 km. La voiture 1 parcourt alors 1 km.

Le nombre de minutes nécessaires est égal au nombre de fois 2,25 km dans 100 km, soit 100/2,25, ou 400/9 de minute. *La conversion et la conclusion se font comme dans la méthode précédente.*

Exercice 7 ***Méthode 1***
Pour 10 caisses, Louis met 15 minutes, Jacques 12 minutes. La différence est de 3 minutes.
La différence de durée étant de 15 minutes (5 fois 3) le nombre de caisses était 50 (5 fois 10).

Méthode 2
Pendant le quart d'heure de travail supplémentaire effectué par Louis, celui-ci a rangé 10 caisses (un quart de 40).
Or l'énoncé indique qu'en une heure, Jacques range 10 caisses de plus. C'est donc qu'ils avaient travaillé ensemble pendant une heures, Jacques avait donc rangé 50 caisses.

Exercice 8 ***Méthode 1***
Augmenter de 10%, c'est multiplier par 1,10
Diminuer de 20%, c'est multiplier par 0,8
le prix initial a donc été multiplié successivement par 1,1 puis par 0,8.
Il a été multiplié par 0 ,88.
Pour retrouvé le prix initial, on divise donc 140,8 par 0,88.
Le prix initial était de 160€.

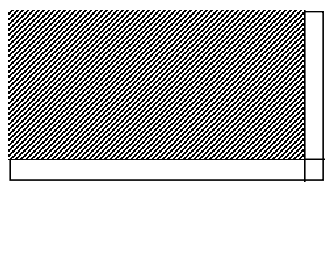
Méthode 2
Un prix de 100€ auquel on appliquerait les mêmes variations deviendrait successivement 110€ puis 88€.
140,8 : 88 = 1,6 Cela signifie que le prix final réel est 1,6 fois celui qu'on obtient en partant de 100€, le prix initial est donc également 1,6 fois 100€, c'est à dire 160€.

Exercice 9 ***Méthode 1***
En 45 minutes le robinet A pourrait remplir 5 bassines identiques, le robinet B en remplirait 3, les deux robinets ensemble en rempliraient 8.
La durée nécessaire est donc 45/8 de minutes, soit 5 minutes plus 5/8 minutes.
Or 5/8 min = 300/8 s = 37,5 s.
La durée nécessaire est donc 5 minutes 37,5 secondes.

Méthode2
En une minute, les robinets remplissent respectivement 1/9 et 1/15 de bassine.
En une minute, ils remplissent donc ensemble $\frac{1}{9}+\frac{1}{15}=\frac{5}{45}+\frac{3}{45}=\frac{8}{45}$ de bassine.
Le nombre de minutes nécessaires à remplir une bassine est donc 45/8 de minutes. *(On conclut comme dans la méthode précédente).*

Exercice 10 ***Méthode 1***
Si on appelle l la largeur de ce rectangle en cm, sa longueur est alors $2l$.
L'aire du rectangle initial est $2l^2$
L'aire du rectangle modifié est $(l+3)\ (2l+3)$soit $2l^2+3l+6l+9$ ou $2l^2+9l+9$.
L'augmentation de 180 cm^2 est donc égale à $9l+9$, on en déduit que $9l= 171$ d'où $l = 19$.
La largeur du rectangle était donc de 19 cm, sa longueur de 38 cm.

Méthode 2
Sur le schéma ci-contre, la partie grisée représente le rectangle initial.



En mettant bout à bout les trois parties non grisées, on obient un rectangle dont la largeur est 3 cm et l'aire est 180cm^2. La longueur de ce rectangle est donc 60 cm, or elle est formée de trois largeurs du rectangle initial et une partie de 3 cm. La largeur du rectangle initial est don 57 : 3 = 19 cm. Par conséquent sa longueur est 38 cm.

Exercice 11 ***Méthode 1***

Le cycliste qui part de A parcourt 30 km en 80 min, il parcourt donc 30 : 4 = 7,5 km en 20 minutes.

A 10 h 20, heure de départ de l'autre cycliste, la distance qui sépare les deux cycliste est donc de 22,5 km.

Le deuxième cycliste parcourt 30 km en 100 min, donc 6 km en 20 min

Distance totale parcourue	13,5	27	9	22,5		
Durée en min	20	40	$\frac{40}{3}$	$20+\frac{40}{3}$		

Or $\frac{40}{3}$ min = 13 min + $\frac{1}{3}$ min = 13 min 20 s.

La durée nécessaire pour parcourir en tout les 22,5 km est donc 33 min 20 s.

L'heure de la rencontre est donc 10 h 53 min 20 s.

Méthode 2 *(Attention, la méthode graphique ne permet d'obtenir qu'un résultat approximatif).*