Le nombre $A = 6 \times 2^{11} + 5 \times 8^4$ peut-il s'écrire sous la forme d'une puissance d'un nombre entier ?

$A = 6 \times 2^{11} + 5 \times 8^4$

Une écriture sous forme de puissance résume une suite de multiplications…puis-je écrire A de façon à ce qu'il n'y ait pas d'addition ?

On sait transformer certaines additions en multiplications :

4 x ⬮ + 3 x ⬮ = 7 x ⬮

2 x 1000 € + 3 x 1000 € = 5 x 1000 € (ça ne donne pas 5 fois 2000 € ni 5 fois 1 000 000 €)

$3 \times e^{i\theta} + 4 \times e^{i\theta} = 7 \times e^{i\theta}$

Essayons de transformer l'écriture de A pour utiliser ce modèle…comme 8 = 2 x 2 x 2, on peut remplacer chaque 8 par une écriture avec des 2

$A = 6 \times 2^{11} + 5 \times 2x2x2 \times 2x2x2 \times 2x2x2 \times 2x2x2$

$A = 6 \times 2^{11} + 5 \times 2^{12}$

Résumons cette écriture sous forme de puissance.

$A = 6 \times 2^{11} + 5 \times 2 \times 2^{11}$

2^{11} et 2^{12}, ce sont deux nombres différents, ils ne peuvent pas jouer le rôle de ⬮.
Essayons de transformer la deuxième partie du calcul pour l'écrire en utilisant «2^{11}».
Imaginons pour cela (sans l'écrire) 2^{12} écrit avec toutes les multiplications… et regroupons les 11 derniers 2 qui se multiplient.

$A = 6 \times 2^{11} + 10 \times 2^{11}$

Il est plus facile de reconnaître le modèle si il y a une seule multiplication dans chaque partie… écrivons 10 à la place de 2 x 5.

$A = 16 \times 2^{11}$

Transformons comme dans le modèle pour ne plus avoir d'addition.

$A = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2^{11}$

Il n'y a plus que des multiplications, mais nous ne pouvons pas encore résumer par une puissance parce que les nombres ne sont pas tous égaux (il y a des 2… et un 16.

Par chance 16 = 2 x 2 x 2 x 2 on peut donc écrire
2 x 2 x 2 x 2 à la place de 16

$A = 2^{15}$

Il ne reste plus qu'à résumer sous forme d'une puissance de 2 en imaginant que tous les deux sont écrits et en les comptant.

Ce qui peut resservir dans un autre problème, et qu'on doit donc chercher à retenir, ce sont les explications de la colonne de droite et non les calculs écrits dans l'exercice.

Yves Thomas, IUFM de l'université de Nantes, site de Nantes.