CRPE 2010-2011—derniers réglages avant l'écrit (1).

Exercice 1

On s'intéresse à des triangles dont un côté mesure 6 cm et un côté mesure 8 cm.
a) Est-il possible de construire un tel triangle ayant une aire de 12 cm^2 ?
On répondra soit en justifiant l'impossibilité, soit en construisant le ou les triangles répondant à tous les critères. S'il existe plusieurs triangles non superposables, on les construira tous.
Les outils autorisés sont la règle graduée, l'équerre et le compas.
b) Même question que a) pour une aire de 36 cm^2 puis pour une aire de 24 cm^2

Exercice 2

On considère trois polyèdres : un pavé droit, un prisme droit à base triangulaire et une pyramide à base carrée.
a) Pour chacun de ces solides, indiquer sans justification son nombre d'arêtes et la somme des nombres de côtés de chacune de ses faces.

b) En s'appuyant sur les exemples qui précèdent, formulez une conjecture concernant le nombre d'arêtes et la somme des nombres de côtés des faces d'un polyèdre.
Cette conjecture est-elle vraie ? Justifier.

c) Est-il possible de construire un polyèdre ayant 7 faces, parmi lesquelles 2 carrés et 5 triangles ?
On répondra soit en dessinant un patron d'un tel polyèdre s'il en existe, soit en justifiant l'impossibilité.

Exercice 3

Monsieur Durand a besoin de louer une voiture pour 2 jours.
Il consulte trois entreprises qui lui proposent les tarifs suivants :
entreprise A : 130 € si la distance parcourue est inférieure ou égale à 250 km, plus 0,22€ pour chaque km parcouru au dela de 250 km.
entreprise B : 200 € tout compris quelle que soit la distance parcourue.
entreprise C : 150 € plus 0,12€ par km parcouru.

a) Représenter sur un même graphique le prix à payer en fonction du nombre de kilomètres parcourus (de 0 à 1000 km).
On utilisera les échelles suivantes : en abscisse, 1 cm pour 50 km, en ordonnée, 1 cm pour 20 €.
Il est conseillé de placer la feuille dans l'orientation dite «paysage»
b) Indiquer par lecture graphique quelle société Monsieur Durand a intérêt à choisir selon la distance qu'il va parcourir.
c) Vérifier par le calcul la réponse à la question b).

Exercice 4

a) Déterminer le reste de la division euclidienne de 1001 par 7.
b) Déduire de la question précédente les restes des divisions euclidiennes suivantes :

8008 : 7   248 248 : 7   634 635 : 7   555 555 : 14

Exercice 5

Deux pompes débitant respectivement 5 litres par seconde et 9 mètres-cubes par heure fonctionnent simultanément. Combien de temps leur faut-il pour vider un bassin de 180 hectolitres d'eau ?

Exercice 6

Construire à la règle graduée et au compas un quadrilatère non croisé ayant simultanément toutes les caractéristiques suivantes :

Il a deux angles droits.
Il n'a pas de côtés parallèles.
Un de ses côtés mesure 5 cm.
Une de ses diagonales mesure 6 cm et l'autre 4 cm.

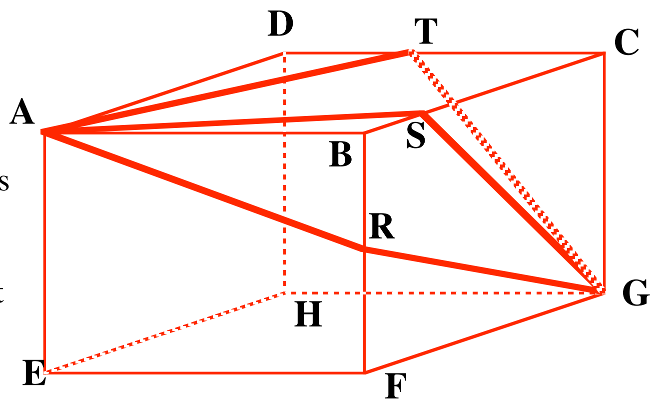
Exercice 7

Un véhicule parcourt un trajet de 150 km.
Il parcourt les 100 premiers kilomètres à vitesse constante, puis les 50 kilomètres suivants à une vitesse à nouveau constante, supérieure de 20 km/h à la vitesse précédente.
La durée totale du trajet est de une heure et quarante-cinq minutes.
Quelle est la vitesse du véhicule pour chacune des deux parties du trajet ?

Exercice 8

Si on ajoute 10 à un nombre positif, son carré augmente de 110. Quel est ce nombre ?

Exercice 9
On considère le pavé droit ABCDEFGH représenté si contre, tel que AB = 4 cm, BC = 5 cm et AE = 3 cm.



On s'intéresse aux trajets joignant les sommets opposés A et G, en restant à la surface du pavé.

On se limite dans un premier temps aux trajets passant par un point S de l'arête [BC].

a) Quelle est la longueur du plus court d'entre eux ?

b) Quelle doit être la longueur BS pour que la longueur du trajet soit celle calculée à la question précédente.

On élargit maintenant la recherche aux trajets passant soit par un point S de [BC] soit par un point R de [BF] soit par un point T de [DC].
c) Quelle est la longueur du plus court de ces trajets ?

Exercice 10

Entre 2007 et 2008, le revenu d'un artisan a augmenté de 60%. Entre 2008 et 2009, il a diminué de 50%. Pour que le revenu de cet artisan soit le même en 2010 qu'en 2007, quelle doit être l'évolution en pourcentage entre les années 2009 et 2010 ?

CRPE 2010-2011—derniers réglages avant l'écrit, corrigé de la fiche 1.

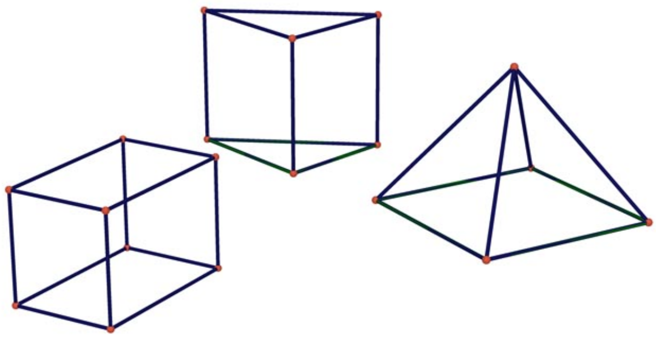
Exercice 1

a) Si l'aire du triangle mesure 12 cm^2 la hauteur relative au côté de 6 cm mesure 4 cm.
Le sommet opposé au côté de 6 cm est donc situé sur une droite parallèle à ce côté et située à 4 cm de ce côté. Sur cette droite, on peut placer au compas deux points situés à 8 cm d'une des extrémités du côté de 6 cm. On obtient deux triangles non superposables.

Remarques :
On peut tracer deux parallèles au côté, et il y a deux choix possibles pour l'extrémité du côté de 6 cm, on peut donc tracer 8 triangles, parmi lesquels il y a deux groupes de 4 triangles isométriques.
On obtient les mêmes triangles en traçant d'abord le côté de 8 cm (la hauteur relative à ce côté mesure 3 cm).

b) Si l'aire du triangle mesure 36 cm^2 la hauteur relative au côté de 6 cm mesure 12 cm. Le sommet opposé au côté de 6 cm est donc situé sur une droite parallèle à ce côté et située à 12 cm de ce côté. Les deux autres côtés mesurent donc au moins 12 cm, il est impossible de construire le triangle demandé.
Si l'aire du triangle mesure 24 cm^2 la hauteur relative au côté de 6 cm mesure 8 cm. Le sommet opposé au côté de 6 cm est donc situé sur une droite parallèle à ce côté et située à 8 cm de ce côté. Le côté de 8 cm doit donc être perpendiculaire au côté de 6 cm, le seul triangle qui convient est donc le triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 6 cm et 8 cm.

Exercice 2



a) Le pavé droit a 12 arêtes.
Ses 6 faces sont toutes des rectangles, la somme des nombres de côté de ses faces est donc égale à 24.

Le prisme droit à base triangulaire a 9 arêtes.
La somme des nombres de côtés de ses faces est égale à
$3 + 3 + 4 + 4 + 4 = 18$

La pyramide à base carrée a 8 arêtes.
La somme des nombre de côtés de ses faces est égale à
$4 + 3 + 3 + 3 + 3 = 16$

b) Les trois exemples qui précèdent suggèrent la conjecture suivante : **Pour tout polyèdre, la somme des nombres de côtés de ses faces est le double de son nombre d'arêtes.**
Cette conjecture est vraie, en effet chaque arête est également un côté pour deux faces adjacentes.

c) Il résulte de la propriété précédente que la somme des nombres de côtés des faces d'un polyèdres est un nombre pair.
Avec 2 carrés et 5 triangles, la somme du nombre de côtés est égale à 23, qui est impair, il est donc impossible de construire un polyèdre dont les faces sont deux carrés et cinq triangles.

Exercice 3

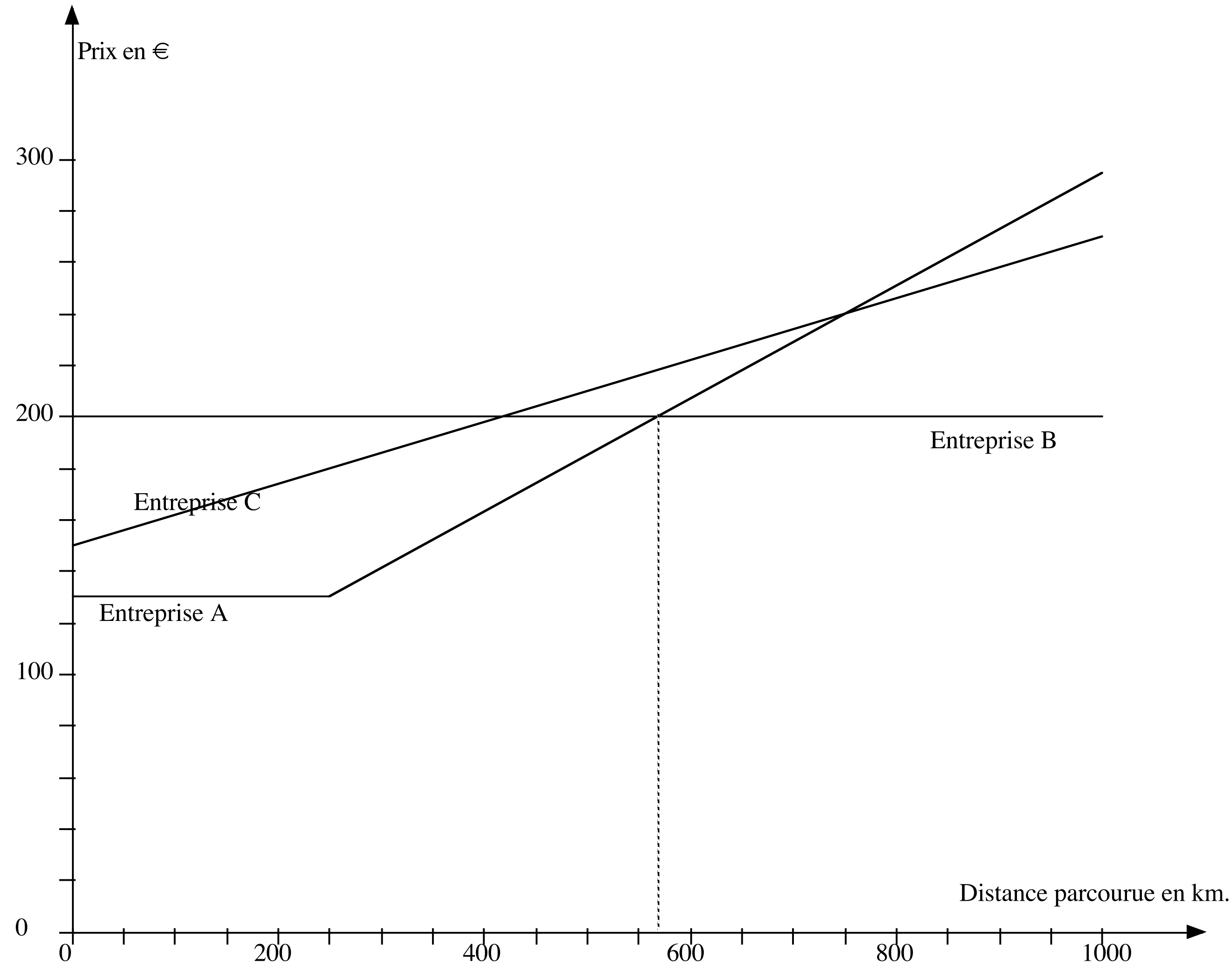
D'après le graphique, monsieur Durand a intérêt à choisir l'entreprise A s'il parcourt une distance inférieure à 570 km environ, il doit choisir l'entreprise B au delà, l'entreprise C n'étant jamais la plus avantageuse.

Pour calculer la distance exacte à partir de laquelle monsieur Durand a intérêt à choisir l'entreprise B, on désigne par x la distance pour laquelle les deux prix seraient égaux. On a alors :

$$130 + 0,22\left(x - 250\right) = 200$$
$$130 + 0,22x - 55 = 200$$
$$0,22x = 125$$
$$x = \frac{125}{0,22} \approx 568,2$$

Monsieur Durand a donc intérêt à choisir l'entreprise A pour parcourir jusqu'à 568 km, l'entreprise B à partir de 569 km.

M Hersant, S Lemaire, J Perez, A Raïs, Y Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes, septembre 2010



Exercice 4

a) On constate en posant la division euclidienne de 1001 par 7 que le quotient est 143 et le reste 0.
1001 = 143 x 7.

b) *L'expression «en déduire que» utilisée dans l'énoncé impose de réutiliser le résultat de la question a) pour résoudre la question b. Toute méthode ne s'appuyant pas sur le résultat de a) ne serait donc pas validée (par exemple le fait de poser les divisions). En revanche, si on ne voit pas immédiatement comment procéder, rien d'interdit de poser la division au brouillon pour déterminer le reste et de chercher ensuite une autre méthode, ce qui est souvent plus facile quand le résultat est connu.*

8008 = 8 x 1001 = 8 x 143 x 7. Le reste de la division de 8008 par 7 est donc 0.

248 248 = 248 x 1001 = 248 x 143 x 7. Le reste de la division de 248248 par 7 est donc 0.

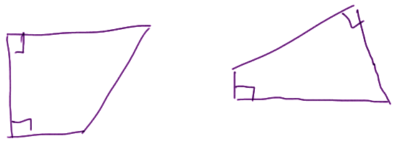
634 635 = 634 x 1001+ 1 = 634 x 143 x 7 + 1. Le reste de la division de 248248 par 7 est donc 1.

555 555 = 555 x 1001 = 555 x 143 x 7. Or 555 x 143 est impair, il existe donc un entier k tel que 555 x 143 = 2k + 1.
On a donc 555 555 = 7 (2k + 1) = 14 k + 7. Le reste de la division de 555 555 par 14 est donc 7.

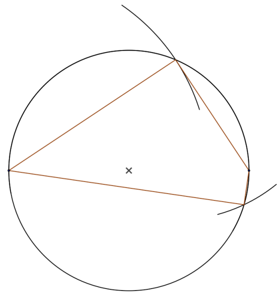
Exercice 5

180 hectolitres c'est 180 x 100 = 18 000 litres soit 18 m^3.
Une pompe qui débite 5 litres par seconde en débite 5 x 3600 = 18 000 en une heure, soit 18 m^3.
A elles deux, les deux pompes vident donc 27 m^3 en une heure, donc 9 m^3 en 20 minutes (3 fois moins) et 18 m^3 en 40 minutes.

Exercice 6



Le quadrilatère à construire doit avoir deux angles droits. on peut envisager que ceux-ci soient adjacents ou opposés, or ils ne peuvent pas être adjacents car le quadrilatère aurait deux côtés parallèles, ce qui est exclu.
Nommons ABCD le quadrilatère, A et C étant les sommets des angles droits. Les triangles BAD et BCD sont rectangles respectivement en A et en C, donc A et C sont situés sur le cercle de diamètre [BD]. [AC] est donc une corde du cercle de diamètre [BD], il en résulte que AC ≤ BD. On doit donc avoir BD = 6 cm et AC = 4 cm.
On peut alors prodéder à la construction ci-contre.



Exercice 7

On peut tenter de résoudre ce problème par une mise en équation, en prenant par exemple pour inconnue v la vitesse en km/h du véhicule sur la première partie du trajet.
L'équation obtenue est du second degré (c'est à dire qu'une fois qu'on l'a simplifiée autant que possible, il reste un terme en v^2). La résolution de ce type d'équation n'est pas au programme du CRPE puisqu'elle n'est enseignée qu'en classe de première S alors que le programme de référence du CRPE est celui du collège… il doit donc être possible de faire autrement.
On peut par exemple procéder par essais successifs.

Vitesse sur la première partie du trajet en km/h	Durée de la première partie du trajet	Vitesse sur la deuxième partie du trajet	Durée de la deuxième partie du trajet	Durée totale	Commentaire
60	100/60 h = 100 min	80	50/80 h = 37,5 min	137,5 min = 2 h 17,5 min	Vitesse trop faible
100	1 heure	120	25 min	1 h 25 min	Vitesse trop élevée
80	100/80 h = 5/4 h =1h 15 min	100	1/2 h = 30 min	1 h 45 min	C'est la vitesse cherchée

Le véhicule se déplace à 80 km/ h sur la première partie du trajet, à 100 km/h ensuite.

Exercice 8

Si on traduit ce problème par une équation, celle-ci semble à nouveau être du second degré, mais en la simplifiant, les termes du second degré disparaissent, la résolution ne pose donc pas de problème.

Notons x le nombre cherché.
Le problème se traduit par :

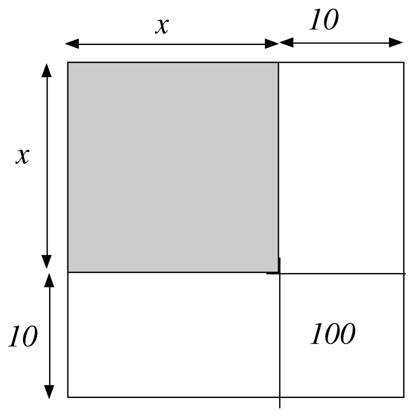
$$(x+10)^2 = x^2 + 110$$

$$x^2 + 20x + 100 = x^2 + 110$$

$$20x = 10$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Le nombre cherché est donc $\frac{1}{2}$

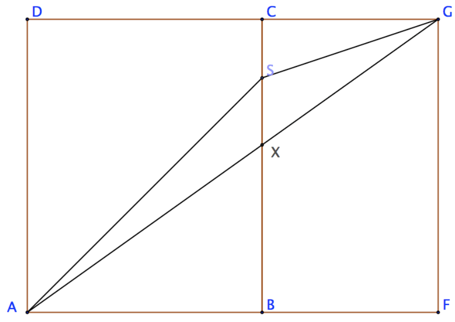


Autre méthode :
le nombre cherché étant positif, son carré peut être interprété comme l'aire d'un carré

dont le nombre est la mesure du côté, le problème se décrit alors par le schéma ci contre dans lequel l'aire totale des trois parties blanches doit mesurer 110.
L'aire de chacun des deux rectangles doit alors mesurer 5, et le côté qui ne mesure pas 10 mesure donc 0,5.

On remarque que les dimensions du schéma sont totalement fausses (0,5 est représenté par un segment plus long que pour 10) ce qui ne gêne en rien la raisonnement et n'est pas surprenant : pour respecter les proportions, il faudrait connaître d'avance la solution du problème.

Exercice 9



a) Considérons un trajet passant par un point S de [BC].
La longueur de ce trajet, égale à AS + GS, n'est pas modifiée si on dessine les faces ADCB et CGFB dans un même plan, comme s'il s'agissait d'une partie d'un patron du pavé.
On a alors AG ≤ AS + SG
La plus petite valeur possible de AS + SG est donc obtenue en plaçant S au point X, intersection de [BC] et [AG].
Le théorème de Pythagore appliqué au triangle ADG, rectangle en D, permet d'affirmer que AG = $\sqrt{74}\ cm$. La longueur du plus court trajet de A à G en passant par un point S de [BC] est donc $\sqrt{74}\ cm$.

b) Pour obtenir cette longueur, on a vu que le point S doit être confondu avec X, intersection de [AG] et [BC].
On peut alors appliquer le théorème de Thalès aux triangles ABX et AFG, on a donc :

$$\frac{AB}{AF}=\frac{BX}{FG}$$

$$\frac{4}{7}=\frac{BX}{5}$$

$$BX=\frac{20}{7}$$

Pour que le trajet passant par S mesure $\sqrt{49}\ cm$, la longueur BS doit donc être égale à $\frac{20}{7}\ cm$

c)Le plus court trajet pasant par un point R de [BF] se calcule comme à la question a), il mesure $\sqrt{90}\ cm$

Le plus court trajet pasant par un point T de [DC] se calcule comme à la question a), il mesure $\sqrt{80}\ cm$

Le plus court de tous les trajets envisagés est donc celui envisagé à la question a), il mesure $\sqrt{74}\ cm$

Exercice 10

Augmenter de 60% revient à multiplier par 1,60.
Diminuer de 50%, c'est multiplier par 0,50.
Entre 2009 et 2010, le revenu de l'artisan doit être multiplié par un nombre k tel que 1,6 x 0,5 x k = 1
On a donc 0,8 k = 1 d'où on tire $k = \frac{1}{0,8} = 1,25$
Entre 2009 et 2010, le revenu de l'artisant doit être multiplié par 1,25 ce qui correspond à une augmentation de 25%.