CRPE 2010-2011—derniers réglages avant l'écrit (2).

Exercice 1

ABCD est un carré. E et F sont deux points situés à l'extérieur du carré et tels que les triangles ABE et BCF sont équilatéraux.
Démontrer que les droites (AC) et (EF) sont parallèles.

Exercice 2

On écrit en chiffres les nombres entiers de 1 à 1000.
Combien de fois a-t-on écrit le chiffre 5 ?

Exercice 3

Pour recouvrir un pan de toiture, on utilise des tuiles de 45 cm de long.
Combien de tuiles sont nécessaires pour obtenir une rangée de 10 mètres de long, sachant que deux tuiles successives d'une même rangée doivent se recouvrir sur une longueur d'au moins 10 cm ?

Exercice 4

On considère deux nombres entiers positifs a et b.
Est-il possible qu'en ajoutant 4 au nombre a et en soustrayant 6 au nombre b le produit de a par b reste inchangé ?

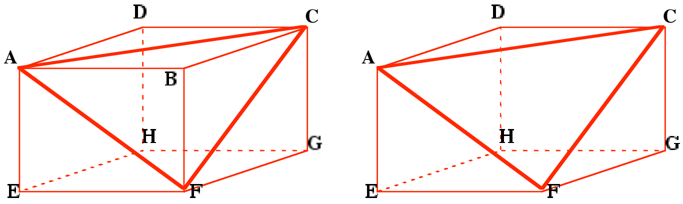
Exercice 5

Un même article est vendu dans les magasins A et B.
Le prix est plus élevé de 20 € dans le magasin A.
Si le prix de cet article augmentait de 10% dans le magasin A et de 20% dans le magasin B, le prix serait alors le même dans les deux magasins.
Quel est le prix de l'article en question ?

Exercice 6

On place dans un sac 8 boules identiques marquées des nombres entiers de 1 à 8, puis on tire au hasard deux de ces boules.
a) Quelle est la probabilité pour que la somme des deux nombres tirés soit paire ?
b) Quelle est la probabilité pour que la différence des deux nombres tirés soit paire ?
c) Quelle est la probabilité pour que le produit des deux nombres tirés soit pair ?

Exercice 7



On considère le pavé droit ABCDEFGH ci-contre, tel que AE = 3 cm, AB = 4 cm et AD = 5 cm.
On tronque ce pavé en enlevant la partie correspondant à la pyramide ABCF.
Dessiner un patron du solide restant (représenté par la figure de droite). Tous les outils sont autorisé, y-compris l'utilisation du quadrillage de la copie.

M Hersant, S Lemaire, J Perez, A Raïs, Y Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes, septembre 2010

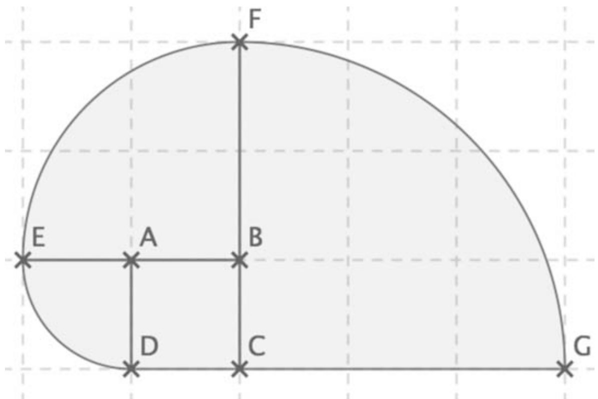
Exercice 8

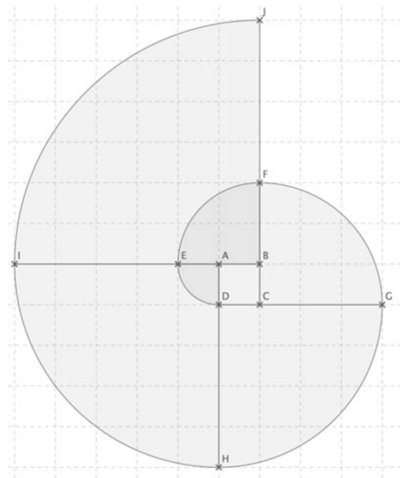
A et B sont deux nombres entiers positifs inférieurs à 100 tels que A > B.
Les divisions euclidiennes de A et de B par 9 ont pour reste 5.
Le reste de la division de B par 8 est supérieur de 1 au reste de la division de A par 8.
Déterminer A et B (s'il y a plusieurs solutions, on les donnera toutes).

Exercice 9

Pour réaliser les figures ci-dessus, on a construit un carré ABCD de 2 cm de côté.
Le tracé se poursuit ensuite, par étapes, chaque étape consistant à construire un quart de disque dont le centre est successivement A, B, C, D, puis à nouveau A,B… et ainsi de suite. Une des extrémités du premier arc tracé est D, on nomme E l'autre extrémité qui sert à son tour d'extrémité au pour le deuxième arc et ainsi de suite.
Sur le schéma de gauche, trois étapes ont été réalisées, sur le schéma de droite, six étapes.
On admettra que les rayons des arcs tracés mesurent successivement (en cm) 2, 4, 6, 8, 10…

Combien faut-il tracer de quarts de disques pour que l'aire de la zone grisée sur les schémas atteigne ou dépasse 500 cm² ?

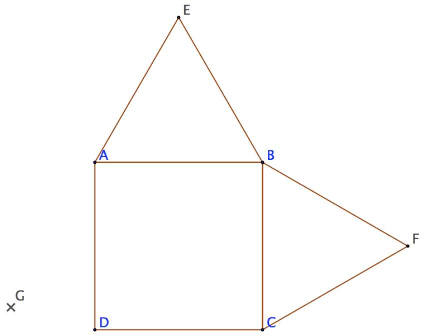




Exercice 10

Jacques doit parcourir 4 km à pieds.
Il marche à vitesse constante.
A l'arrivée, Jacques calcule que si sa vitesse avait été plus rapide de 25%, il aurait mis 8 minutes de moins. A quelle vitesse Jacques marche-t-il ?

CRPE 2010-2011—derniers réglages avant l'écrit, corrigé de la fiche 2.



Exercice 1

ABCD est un carré, donc AB = BC. De plus les triangles ABE et BCF sont équilatéraux, donc BE = BF.
Le triangle BEF est donc isocèle en B, la mesure en degrés de son angle au sommet $\widehat{EBF}$ est 360 - (90 + 60 + 60) = 150

Chacun des angles égaux $\widehat{BEF}$ et $\widehat{BFE}$ mesure donc $\frac{180-150}{2}$ =15°

L'angle $\widehat{FEA}$ est égal à $\widehat{FEB}+\widehat{BEA}$, il mesure donc 75°.

Considérons maintenant le point G, symétrique de E par rapport à A
L'angle $\widehat{CAG}$ est égal à $\widehat{EAG}$ - ($\widehat{EAB}+\widehat{BAC}$), il mesure donc 180 - (60 + 45) = 75°
Les droites (EF) et (AC) forment avec leur sécante (AE) deux angles correspondants $\widehat{FEA}$ et $\widehat{CAG}$ égaux, elles sont donc parallèles.

Autre piste de démonstration : prouver que (BD) est à la fois la médiatrice de [AC] et celle de [EF].

Exercice 2

Le chiffre 5 est utilisé 100 fois au rang des centaines (de 500 à 599)
Il est utilisé 10 fois au rang des dizaines (de 50 à 59) dans chacune des centaines, donc 100 fois en tout au rang des dizaines.
Il est également utilié une fois au rang des unités pour chaque nombre de dizaines possible (de 0 à 99), donc 100 fois en tout.
Le chiffre 5 est donc utilisé 300 fois au total.

Autre méthode :
On ne change pas le nombre de «5» utilisés si on écrit tous les nombres avec trois chiffres, en écrivant les 0 inutiles aux rangs des centaines et des dizaines (007 par exemple). Chaque chiffre est alors utilié autant de fois car on forme toutes les écritures possibles de trois chiffres choisis parmi les dix. Comme on écrit alors 3000 chiffres en tout, chacun d'eux est écrit 300 fois

Exercice 3

Avec une seule tuile, on peut couvrir une longueur de 45 cm
Avec deux tuiles on peut couvrir une longueur de 45 cm + 35 cm.
Chaque nouvelle tuile permet de couvrir une longueur supplémentaire de 35 cm.
la longueur maximum que l'on peut recouvrir avec n tuiles est donc égale (en cm) à 45 + 35 (n -1)
Pour qu'il soit possible de recouvrir une longueur de 10 m, on doit donc avoir :

$$45+35(n-1)\geq 1000$$

$$35n \geq 990$$

$$n \geq \frac{990}{35}$$

Or $\frac{990}{35} \approx 28{,}3$ Il sera donc nécessaire d'utiliser 29 tuiles.

On peut aussi ne pas utiliser d'inéquation mais calculer 45 + 35 n pour différentes valeurs de n
45 + 35 x 30 = 1095, 31 tuiles suffisent donc pour couvrir 10 m ou 1000 cm
45 + 35 x 28 = 1025, 29 tuiles suffisent donc pour couvrir 10 m
45 + 35 x 27 = 990, 28 tuiles ne suffisent pas pour couvrir 10 m.
29 tuiles sont donc nécessaire pour couvrir une longueur de 10 m.

M Hersant, S Lemaire, J Perez, A Raïs, Y Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes, septembre 2010

Exercice 4

a et b satisfont la condition sur le produit si et seulement si :

$$ab = (a+4)(b-6)$$

$$ab = ab - 6a + 4b - 24$$

$$6a = 4b - 24$$

$$a = \frac{4b-24}{6} = \frac{2b}{3} - 4$$

Cette égalité ne tient pas compte du fait que a et b doivent être des entiers positifs.
Pour en tenir compte, il suffit de choisir b parmi les multiples de 3 supérieurs à 6.

$a = 4$; $b = 12$ ou $a = 16$; $b = 30$ sont des exemples de couples de valeurs qui conviennent, il est donc possible de respecter la condition posée dans l'énoncé.

Exercice 5

soit *a* le prix dans le magasin A, *b* le prix dans le magasin B.
On a alors *a = b + 20 et 1,10 a = 1,20 b*
On en déduit que :

$$1,1(b+20) = 1,2b$$

$$1,1b + 22 = 1,2b$$

$$22 = 0,1b$$

$$b = 220$$

Le prix est donc de 220 € dans le magasin B et de 240 € dans le magasin A.
Après les augmentations envisagées, le prix serait de 264 € dans chacun des deux magasins.

Exercice 6

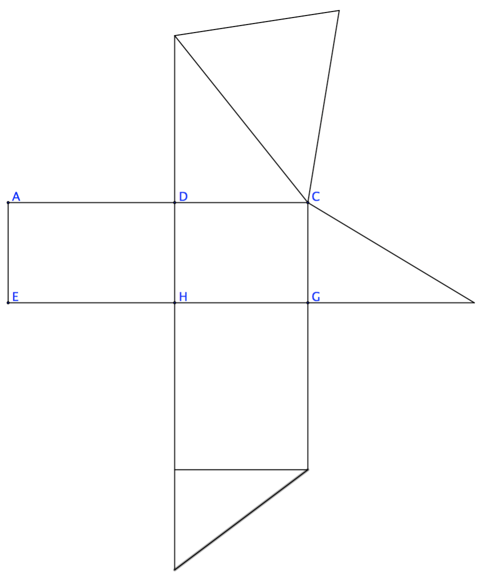
a) Pour que la somme soit paire il faut et il suffit que les deux boules aient la même parité (toutes les deux paires ou toutes les deux impaires).
Le sac contient au départ quatre boules paires et quatre impaires, quand la première boule est tirée, il reste 7 boules dont 3 ont la même parité que celle déjà tirée. La probabilité de tirer deux boules de même parité, et donc que leur somme soit paire est donc 3/7.

b) Considérons deux nombres entiers x et y avec x>y. on a x+y = x-y + 2y.
Il en résulte que si la somme de deux entiers est paire, leur différence l'est aussi, et réciproquement.
La probabilité de tirer deux boules dont la différence est paire est donc 3/7.
O*n pouvait aussi refaire à l'identique le raisonnement de la question a.*

c) Pour que le produit des deux nombres soit pair, il faut et il suffit que l'un des deux soit pair.
Pour que le produit soit impair il faut et il suffit que les deux nombres soient impairs. Nous allons d'abord calculer la probabilité d'obtenir un produit impair car c'est plus simple.
Il y a 4 tirages favorables de la première boule parmi 8 possibles.
Pour chacun de ces 4 tirages, il y a 3 tirages favorables de la seconde boule parmi 7 possibles.
Il y a donc finalement 12 tirages favorables sur 56 tirages possibles.
La probabilité d'obtenir un produit impair est 12/56 =3/14.
Comme le produit ne peut être que pair ou impair, la probabilité d'obtenir un produit pair est 1 - 3/14 = 11/14.

Exercice 7

Voici une réduction d'un des patrons possibles.
Attention, la face qui est un triangle non rectangle (correspondant au plan de coupe) ne doit pas être oubliée.



Exercice 8

A et B ayant pour reste 5 dans la division par 9, ils doivent être choisis parmi les nombres suivants :

5 14 23 32 41 50 59 68 77 86 95

pour chacun de ces nombres, déterminons son reste dans la division par 8 :

valeur	5	14	23	32	41	50	59	68	77	86	95
reste	5	6	7	0	1	2	3	4	5	6	7

Pour que A soit plus grand que B, et que le reste de la division de B par 8 soit supérieur de 1 à celui de la division de A par 8, les seules possibilités sont donc :

A = 68 ; B = 5   A = 77 ; B : 14   A = 86 ; B = 23

Exercice 9

A cause des superpositions, l'aire grisée est égale à la somme des aires du carré central et des quatre derniers quarts de disque tracés.

le $n^{\text{ème}}$ quart de disque a un rayon égal à 2n, son aire est donc égale à $\dfrac{\pi(2n)^2}{4} = \pi n^2$

L'aire du carré central mesure 4, ce qui est compris entre π et 2π

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Aire du quart de disque	π	4π	9π	16π	25π	36π	49π	64π	81π
Somme des aires des quatre derniers quarts de disque				30π	54π	86π	126π	174π	230π
Aire grisée en tenant compte du carré.				31π<A<32π	55π<A<56π	87π<A<88π	127π<A<128π	175π<A<176π	231π<A<232π

Comme $500 \approx 159\pi$ Le tableau montre que l'aire grisée dépasse 500 cm^2 quand on trace le 8ème quart de disque.

Exercice 10

Si la vitesse de Jacques augmente de 25%, elle est multipliée par 5/4.
Pour une distance constante, la vitesse et la durée du trajet sont inversement proportionnelles.
La durée du trajet serait donc multipliée par 4/5, ce qui revient à dire qu'elle diminuerait d'un cinquième.
Un cinquième de la durée du trajet est donc égal à 8 minutes, la durée est alors de 40 minutes.
Si Jacques parcourt 4 km en 40 min, il parcourt 2 km en 20 min et 6 km en une heure.
Jacques marche donc à 6 km/h.

Autre solution

Soit v la vitesse de Jacques en km/h, on a alors :

$\dfrac{4}{v} = \dfrac{4}{1,25v} + \dfrac{8}{60}$ $\dfrac{4}{v} - \dfrac{4}{1,25v} = \dfrac{8}{60}$ $\dfrac{5}{1,25v} - \dfrac{4}{1,25v} = \dfrac{8}{60}$

$\dfrac{1}{1,25v} = \dfrac{8}{60}$ $8 \times 1,25v = 60$ $v = \dfrac{60}{10} = 6$

La vitesse de Jacques est donc de 6 km/h.