

CRPE 2010-2011 — derniers réglages avant l'écrit (4).

Exercice 1

Dans un collège, 52% des élèves de troisième sont des filles.
90% des filles de troisième de ce collège sont reçues au brevet, ainsi que 80% des garçons de troisième.
Le nombre total de reçus au brevet dans ce collège est de 213.
Combien y a-t-il d'élèves de troisième dans ce collège ?

Exercice 2

On place 8 boules identiques numérotées de 1 à 8 dans une urne.

- a) On tire successivement deux boules, sans remettre la première dans l'urne avant de tirer la seconde. Quelle est la probabilité pour que le numéro de la seconde boule tirée soit supérieur à celui de la première ?
- b) On tire une boule, on la remet dans l'urne puis on tire à nouveau une boule. Quelle est la probabilité pour que le numéro de la seconde boule tirée soit supérieur à celui de la première ?

Exercice 3

- a) Un nombre entier positif P a pour reste 11 dans la division euclidienne par 36.
Quels sont les restes respectifs des divisions euclidiennes de P par 4 puis par 9 ?
- b) Un nombre entier positif R a pour reste 1 dans la division euclidienne par 4. Il a pour reste 4 dans la division euclidienne par 9.
Quel est le reste de la division euclidienne de R par 36 ?

Exercice 4

On forme en roulant une feuille de papier rectangulaire un cylindre dépourvu de ses bases.
Les deux cylindres que l'on peut obtenir (on peut utiliser comme hauteur du cylindre la longueur ou la largeur du rectangle) ont-ils le même volume ?

Exercice 5

Soit ABC un triangle équilatéral.
 $ABEF$ est un rectangle tel que C soit sur $[EF]$.
Soit M le milieu de $[BC]$.
Démontrer que AMF est équilatéral.

Exercice 6

Un segment $[AB]$ étant donné, construire à la règle non graduée et au compas un triangle ABC dont la médiane issue de C mesure AB et dont la hauteur issue de B mesure $AB/2$.
On laissera visibles les traits de construction et si plusieurs positions conviennent pour le point C on les donnera toutes.

Exercice 7

Ecrire le nombre 1 000 en base 7.
En déduire l'écriture en base 7 du nombre 49 000.

Exercice 8

Si on ajoute 15 au nombre positif R , le carré de R augmente de 44%.
Déterminer R .

Exercice 9

Paul part à pieds à 9h pour parcourir 20 km.
Au démarrage, Paul marche à la vitesse constante de 6 km par heure.
Tous les 6 km, à cause de la fatigue, la vitesse de Paul diminue d'exactly 1 km/h.
A quelle heure Paul terminera-t-il son parcours ?

Exercice 10

Dans une région, en 2009 il y avait 100 agriculteurs.
En 2009, 40 d'entre eux ont eu un revenu annuel de 5 000 €, 50 d'entre eux ont eu un revenu annuel de 16 000 €, et les 10 autres ont eu un revenu annuel de 100 000 €.

a) Quel est le revenu moyen et quel est le revenu médian des agriculteurs de cette région en 2009.

b) Proposer si possible, pour chacune des hypothèses suivantes, des valeurs pour les revenus des agriculteurs de cette région en 2010 qui vérifient l'hypothèse.

1. De 2009 à 2010, le revenu moyen double mais le revenu médian diminue.
2. De 2009 à 2010, le revenu moyen est divisé par deux, mais le revenu médian augmente.
3. Chacun des agriculteurs exerçant en 2010 a vu son revenu diminuer depuis 2009, cependant le revenu moyen des agriculteurs exerçant dans la région a augmenté.

Exercice 1

La proportion d'élèves de troisième reçus au brevet dans ce collège est égale à :

$$\frac{90}{100} \times \frac{52}{100} + \frac{80}{100} \times \frac{48}{100} = \frac{468}{1000} + \frac{384}{1000} = \frac{852}{1000}$$

Soit N le nombre d'élèves de troisième, on a donc :

$$\frac{852}{1000} N = 213$$

$$N = 213 \times \frac{1000}{852} = 250$$

Il y a 250 élèves de troisième dans ce collège.

Exercice 2

a) Si on ne remet pas la première boule, on ne peut donc pas tirer deux nombres égaux.

Comme l'évènement tirer la boule A puis la boule B a autant de chance de se produire que l'évènement tirer la boule B puis la boule A, la probabilité que le numéro de la seconde boule soit supérieur à celui de la première est 1/2

b) Si on remet la première boule, il y a une chance sur 8 de tirer à nouveau la même et d'avoir deux nombres égaux.

Parmi les cas où les deux nombres tirés sont inégaux (7 chances sur 8) il y a autant de cas où le premier nombre est le plus grand que de cas où c'est le deuxième qui est le plus grand.

La probabilité pour que le deuxième nombre soit plus grand que le premier est donc égale à 7/16.

Exercice 3

a) Le nombre P a pour reste 11 dans la division par 36, donc $P = 36k + 11$, où k est un nombre entier naturel.

On a donc $P = 36k + 9 + 2 = 9(4k + 1) + 2$, ce qui montre que le reste de la division de P par 9 est 2.

On a également $P = 36k + 8 + 3 = 4(9k + 2) + 3$, ce qui montre que le reste de la division de P par 4 est 3.

b) Soit r le reste dans la division de R par 36.

Si on divise R par 4, par 9 ou par 36 les restes sont les mêmes que si on divise r par les mêmes nombres.

en effet, soit r_1 le reste de la division de r par 9.

On a $r = 9h + r_1$ et $R = 36k + r$, où h et k sont des entiers,

donc $R = 36k + 9h + r_1 = 9(4k + h) + r_1$ ce qui établit que R et r ont le même reste dans la division par 9

L'affirmation concernant la division par 36 est triviale, celle concernant la division par 4 se démontre comme pour la division par 9.

Les restes étant les mêmes si on divise R ou r, on peut se contenter d'une étude systématique pour toutes les valeurs possibles de r, c'est à dire de 0 à 35.

r a pour reste 1 dans la division par 4, les valeurs de r inférieures à 36 sont donc parmi les nombres suivants :

1 5 9 13 17 21 25 29 33

r a pour reste 4 dans la division par 9, les valeurs de r inférieures à 36 sont donc parmi les nombres suivants :

4 13 22 31

La seule valeur de r inférieure à 36 qui convienne est donc 13, le reste de la division de R par 36 est donc 13.

Exercice 4

Soient L la longueur du rectangle, l sa largeur.

Soit R le rayon du cercle obtenu si la longueur du rectangle devient le cercle de base et la largeur devient la hauteur du cylindre.

$$\text{On a alors } L = 2\pi R \quad \text{ou} \quad R = \frac{L}{2\pi}$$

Le volume du cylindre est alors égal à : $\pi R^2 l = \frac{\pi L^2 l}{4\pi^2} = \frac{L^2 l}{4\pi} = L \frac{Ll}{4\pi}$

On nomme de même r le rayon du cercle obtenu si la largeur du rectangle devient le cercle de base et la longueur devient la hauteur du cylindre.

On a alors $l = 2\pi r$ ou $r = \frac{l}{2\pi}$

Le volume du cylindre est alors égal à : $\pi r^2 L = \frac{\pi l^2 L}{4\pi^2} = \frac{l^2 L}{4\pi} = l \frac{Ll}{4\pi}$

Comme $L > l$, le volume obtenu en prenant la largeur de la feuille comme hauteur du cylindre est plus grand.

Exercice 5

Considérons la droite d , parallèle à (AB) et passant par M .

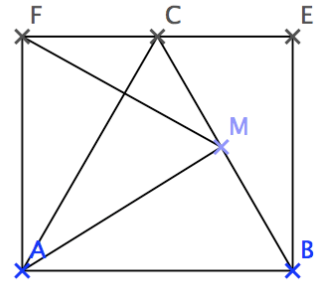
Dans le triangle ABC , la droite d passe par le milieu du côté $[BC]$ et est parallèle au côté $[AB]$, elle passe donc par le milieu de $[AC]$.

$ABEF$ est un rectangle, donc $(AB) \parallel (EF)$ or $d \parallel (AB)$ par conséquent d est parallèle à (EF) .

Dans le triangle ACF , la droite d passe par le milieu du côté $[AC]$ et est parallèle au côté $[EF]$, elle passe donc par le milieu de $[AF]$.

$ABEF$ est un rectangle (AF) est donc perpendiculaire à (AB) , or d est parallèle à (AB) donc d est perpendiculaire à (AF) .

La droite d , qui passe par le milieu de $[AF]$ et lui est perpendiculaire est donc la médiatrice de $[AF]$. Le point M , situé sur d , est alors équidistant de A et F , et le triangle AFM est isocèle en M .



M est le milieu de $[BC]$ donc (AM) est la médiane issue de A du triangle équilatéral ABC , c'est donc aussi la bissectrice de l'angle de sommet A , par conséquent $\widehat{BAM} = 30^\circ$ On en déduit que $\widehat{FAM} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

Le triangle AMF est isocèle et a un angle de 60° par conséquent il est équilatéral.

Exercice 6

Éléments concernant la recherche : pour construire le point C , il faut trouver deux « lieux » (droite ou cercle) sur lesquels se situe C .

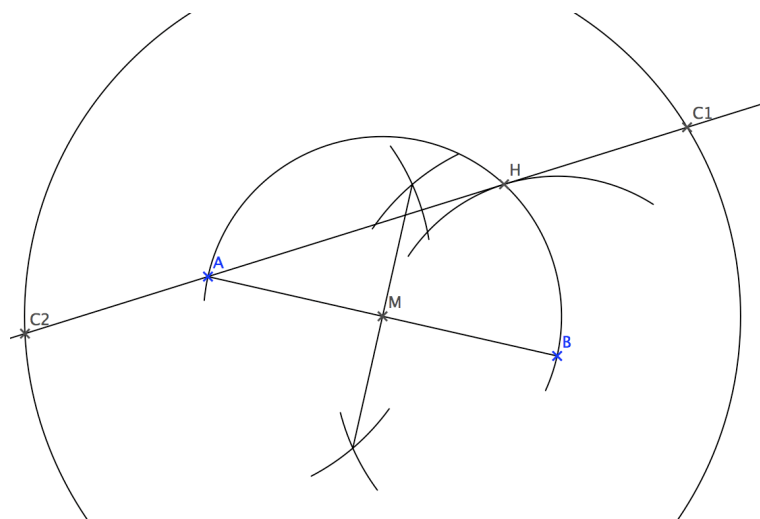
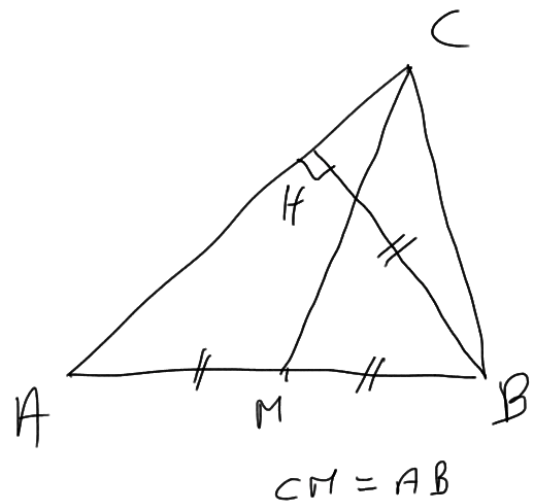
Le point C sera obtenu comme intersection des deux lieux.

L'observation d'une figure faite à main levée suggère rapidement le cercle de centre M (milieu de $[AB]$) et de rayon AB comme premier lieu.

L'autre lieu utilisable est la droite (AH) .

On est donc conduit à construire le point H .

Pour cela, on utilise le fait que ABH est rectangle en H , donc H est situé sur le cercle de diamètre $[AB]$.



Sur la figure ci-contre, pour plus de clarté, on n'a fait figurer que deux points C_1 et C_2 tels que les triangles ABC_1 et ABC_2 remplissent les conditions. Pour répondre correctement à la question en donnant toutes les positions possibles du point C , il faudrait ajouter les symétriques de C_1 et C_2 par rapport à (AB) .

Exercice 7

$$7^2 = 49 \quad 7^3 = 343$$

$$1000 = 2 \times 343 + \underline{314} = 2 \times 343 + 6 \times 49 + 20 = 2 \times 343 + 6 \times 49 + 2 \times 7 + 6$$

1000 s'écrit donc 2626 en base 7.

En base 7, décaler les chiffres d'un cran vers la gauche multiplie par 7 leur valeur.

Le nombre 49000 s'écrit donc 262600 en base 7

Exercice 8

Si le carré de R augmente de 44%, il est multiplié par 1,44.

$$\text{Or } 1,44 = 1,2^2$$

On en déduit que le nombre R a été multiplié par 1,20 c'est à dire augmenté de 20%

15 vaut donc 20% de R, et R est égal à 75.

Exercice 9

Paul parcourt les 6 premiers km à 6 km/h, donc en une heure

Il parcourt les 6 km suivants à 5 km/h, il met donc 6/5 heures, soit une heure et 12 minutes.

Il parcourt les 6 km suivants à 4 km/h en une heure et 30 minutes.

Paul parcourt enfin 2 km à 3 km/h en 40 minutes.

Au total, Paul marche pendant 4 heures 22 minutes, il termine donc le parcours à 13 heures 22 minutes.

Exercice 10

a) Le revenu moyen est le quotient du revenu total par le nombre d'agriculteurs.

$$\frac{40 \times 5000 + 50 \times 16000 + 10 \times 100000}{100} = 20000$$

Le revenu moyen par agriculteur est donc 20 000 €

Le revenu médian est de 16 000 € puisque on peut partager la population en deux groupes de 50 agriculteurs, les revenus d'un groupe étant tout inférieurs ou égaux à 16 000 € tandis que les revenus de l'autre groupe sont supérieurs ou égaux à 16 000 €.

b)

1. Pour que le revenu moyen double, il suffit que le revenu total double.

C'est le cas si 10 agriculteurs ont un revenu de 310 000 € en 2010 tandis que les 90 autres ont un revenu de 10 000 €.

Le revenu moyen est alors de 40 000 € tandis que le revenu médian est de 10 000 €.

2. Si le revenu moyen est divisé par 2, il est de 10 000 en 2010. Le revenu total est de 1 000 000 €

Si ce revenu est réparti ainsi : 60 agriculteurs ont un revenu de 16500 € tandis que le 40 autres ont un revenu de 250 €, le revenu médian est de 16500 €, il a augmenté.

3. Supposons que les agriculteurs qui ne gagnaient que 5000 € en 2010 ont cessé leur activité, ainsi que 10 de ceux qui gagnaient 16000 €.

Si ceux qui gagnaient 16 000 € en 2009 et n'ont pas cessé n'en gagnent que 15000 en 2010 et si ceux dont le revenu était 100 000 € ont maintenant un revenu de 90 000 €

$$\frac{40 \times 15000 + 10 \times 90000}{50} = 30000$$

Le revenu moyen est maintenant de 30 000 €, il a bien augmenté alors que le revenu de tous les agriculteurs poursuivant leur activité a baissé.

Bien entendu, beaucoup d'autres valeurs peuvent être choisies pour vérifier les conditions de l'énoncé.