Préparation à l'écrit du CRPE, exercices d'entraînement variés corrigés (2).

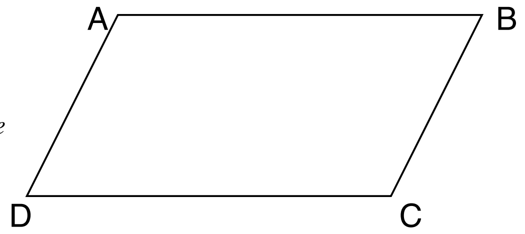
Exercice 1

ABCD est un parallélogramme.

1) Construire en utilisant exclusivement une règle non graduée et une équerre le symétrique de B par rapport à C.

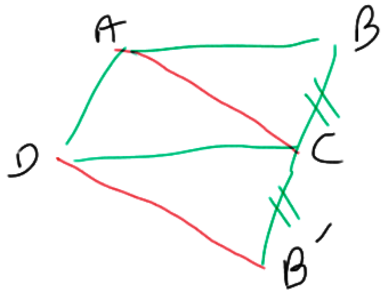
Les perpendiculaires construites avec l'équerre seront codées.

2) Justifier la construction effectuée à la question précédente.



Comme pour tout problème de construction, la recherche commence en dessinant à main levée la figure que l'on cherche à obtenir (sans se soucier ni de l'ordre de la construction ni des instruments imposés). Ce dessin à main levée peut attirer l'attention sur le parallélisme des droites (AC) et (DB') qu'on utilisera ensuite pour la construction.

On construit alors une droite (d) perpendiculaire à (AC) puis la perpendiculaire à (d) passant par D. On obtient ainsi la parallèle à (AC) passant par D, elle coupe (BC) en B' qui est le point cherché.



Deux justifications possibles :

ABCD est un parallélogramme, donc (AD) // (BC) et par conséquent (AD) // (CB').
Le quadrilatère ACB'D a ses côtés opposés parallèles deux à deux donc c'est un parallélogramme.
ABCD est un parallélogramme donc BC = AD
ACB'D est un parallélogramme donc AD = CB'
BC = AD et AD = CB' donc BC = CB', de plus B' est sur (BC) donc B' est le symétrique de B par rapport à C.

Soit O l'intersection de [AC] et [BD].
ABCD est un parallélogramme donc O est le milieu de [BD].
Dans le triangle BB'C, la droite (AO) passe par le milieu de [BD] et est parallèle à [DB'], elle passe donc par le milieu de [BB'] qui est par conséquent le point C.
C est le milieu de [BB'] donc B' est le symétrique de B par rapport à C.

Exercice 2

Une personne née en 1970 atteint en 2011 son 41ème anniversaire.

Une personne née en 1984 atteint en 2011 son 27ème anniversaire.

Si on ne retient que le nombre formé par les deux derniers chiffres de l'année de naissance et qu'on l'ajoute à l'âge atteint en 2011, on obtient dans 111 dans les deux cas.

Obtient-on le même résultat avec n'importe quelle autre année de naissance ? Justifier.

Une personne née en 2002 atteint en 2011 son 9ème anniversaire
Si on ne retient que le nombre formé par les deux derniers chiffres de l'année de naissance et qu'on l'ajoute à l'âge atteint en 2011, on obtient 11. Il n'est donc pas vrai qu'on obtient toujours 111.

Démontrons (ce qui n'était pas demandé) qu'on obtient toujours 111 pour une personne née dans les années 1900.
soit n l'année de naissance. L'âge atteint en 2011 est égal à 2011 - n. le nombre formé par les deux derniers chiffres de l'année de naissance est n - 1900.
Le nombre calculé est donc égal à (2011 - n) + (n - 1900) soit 111.

Exercice 3

Un professeur d'école, ne sachant comment dépenser la totalité de son salaire, place un milliard d'euros avec un intérêt de 3% (il s'agit d'intérêts cumulés, c'est à dire que les intérêts d'une année produisent eux-mêmes des intérêts à partir de l'année suivante).

Quelques années plus tard, il est désespéré car le calcul des intérêts sur la somme placée conduit à des fractions de centimes d'euros…il est obligé de procéder à un arrondi.

Au bout de combien d'années de placement ce phénomène se produit-il ?

La somme placée est multipliée par $\frac{103}{100}$ chaque année.

Au bout de 4 ans elle est de $1000\,000\,000 \times \left(\frac{103}{100}\right)^4$ soit 10×103^4

Au bout de 5 ans elle est de $10 \times 103^4 \times \frac{103}{100}$ soit $\frac{103^5}{10}$.

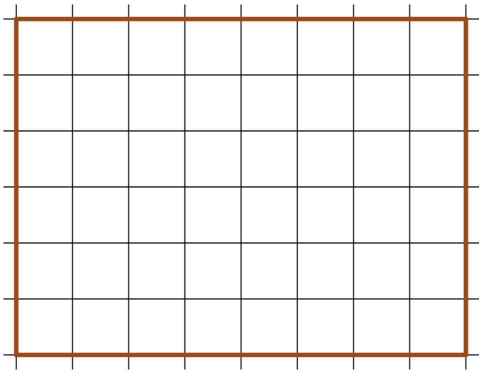
103 n'étant divisible ni par 2 ni par 5 il est nécessaire d'utiliser des dixièmes d'Euro ce qui ne pose pas de problème car un dixième d'Euro est égal à dix centimes.

Au bout de 6 ans, la somme est devenue $\frac{103^5}{10} \times \frac{103}{100}$ soit $\frac{103^6}{1000}$.

C'est donc au bout de 6 ans que des millièmes d'Euro (c'est à dire des dixièmes de centime) seraient nécessaires.

Exercice 4

Les petits carreaux de cette grille rectangulaire ont des côtés de 1 cm.
On trace en suivant les lignes du quadrillage des rectangles dont le périmètre est 20 cm.
Combien peut-on en tracer ?



Répartissons les rectangles que l'on peut tracer en plusieurs catégories selon la mesure des côtés portés par les lignes horizontales du quadrillage.
Ces côtés peuvent mesurer de 4 à 8 cm (pour moins de 4 cm, la dimension de la grille ne permet pas de tracer des côtés verticaux suffisamment longs pour obtenir le périmètre voulu).

Si les côtés horizontaux mesurent 4 les côtés verticaux mesurent 6, le rectangle peut alors être dessiné dans 5 positions différentes (on peut le déplacer horizontalement mais pas verticalement).
Si les côtés horizontaux mesurent 5 les côtés verticaux mesurent 5, le rectangle (qui est alors un carré) peut être placé dans 8 positions différentes (4 choix possibles dans le sens horizontal, 2 dans le sens vertical).
Si les côtés horizontaux mesurent 6 les côtés verticaux mesurent 4, le rectangle peut être placé dans 9 positions différentes (3 choix possibles dans le sens horizontal, 3 dans le sens vertical).
Si les côtés horizontaux mesurent 7 les côtés verticaux mesurent 3, le rectangle peut être placé dans 8 positions différentes (2 choix possibles dans le sens horizontal, 4 dans le sens vertical).
Si les côtés horizontaux mesurent 8 les côtés verticaux mesurent 2, le rectangle peut être placé dans 5 positions différentes (un seul choix possible dans le sens horizontal, 5 dans le sens vertical).
Le nombre total de rectangles pouvant être tracés est donc égal à 5 + 8 + 9 + 8 + 5 = 35.

Exercice 5

	A	B
1	13	9
2	20	13
3	10	19
4	5	28
5	8	14

Dans le tableau ci dessus, les cellules A1 et B1 sont remplies avec des nombres entiers.
La formule suivante est écrite dans la cellule A2 et recopiée en tirant vers le bas. =SI(MOD(A1;2)=0;A1/2;(3*A1+1)/2)
La formule suivante est écrite dans la cellule B2 et recopiée en tirant vers le bas. =SI(MOD(B1;2)=0;B1/2;(3*B1-1)/2)
La fonction MOD utilisée dans ces formules calcul le reste de la division euclidienne du premier argument par le deuxième argument. Ainsi, MOD(15;7) est égal à 1 et MOD(54;10) est égal à 4.

On écrit le nombre 7 en A1, calculer les valeurs qui apparaissent dans les cellules A2 à A12 (dans lesquelles la même formule a été recopiées)
On écrit le nombre 7 en B1, calculer les valeurs qui apparaissent dans les cellules B2 à B12 (dans lesquelles la même formule a été recopiées)
Pour chacune des deux conjectures qui suivent, peut-on affirmer qu'elle est vraie ou qu'elle est fausse au vu des seules valeurs calculées dans la question précédente ?

> **Conjecture 1 : Si on écrit un nombre entier en A1 et qu'on recopie la formule de la cellule A2 suffisamment loin vers le bas, on finira toujours par obtenir le nombre 1**
> **Conjecture 2 : Si on écrit un nombre entier en B1 et qu'on recopie la formule de la cellule B2 suffisamment loin vers le bas, on finira toujours par obtenir le nombre 1**

Les formules inscrites dans le tableau peuvent se décrire ainsi :
Dans la colonne A, si un nombre est pair, le suivant est sa moitié. Si un nombre est impair, on obtient le suivant en le multipliant par 3, en ajoutant 1 au résultat puis en divisant par 2.
Dans la colonne B, si un nombre est pair, le suivant est sa moitié. Si un nombre est impair, on obtient le suivant en le multipliant par 3, en soustrayant 1 au résultat puis en divisant par 2.

Valeurs successives dans la colonne A si on place 7 en A1.

7	11	17	26	13	20	10	5	8	4	2	1

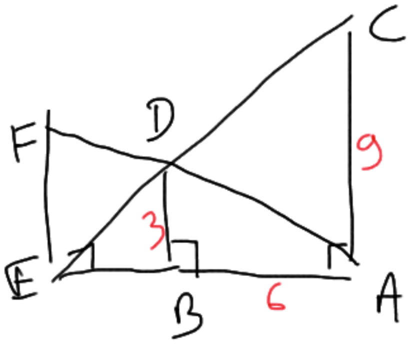
Valeurs successives dans la colonne B si on place 7 en B1.

7	10	5	7	10	5	7	10	5	7	10	5

On ne peut rien affirmer concernant la conjecture 1. Elle est vérifiée pour 7, pour 11, pour 17…mais rien ne permet d'affirmer qu'elle est vraie pour tout nombre entier.
La conjecture 2 est fausse puisqu'elle n'est pas vérifiée si on écrit 7 en B1 (on obtient une répétition de 7, 10 et 5).

Exercice 6
ABDC est un trapèze rectangle en A et en B tel que AC = 9 cm, AB = 6 cm et BD = 3 cm
Les droites (AB) et (CD) se coupent en E.
On trace la parallèle à (AC) passant par E, elle coupe (AD) en F.

1) **Calculer EF**
2) **Recommencer le calcul précédent en remplaçant « AB = 6 cm» par «AB = 5 cm» sans aucun autre changement dans l'énoncé.**
3) **Que peut on conjecturer à l'issue des deux premières questions ? Prouvez que votre conjecture est vraie.**



E, D et C sont alignés ainsi que E, B et A. De plus (BD) et (AC) sont parallèles, on peut donc appliquer le théorème de Thalès aux triangles BED et AEC.
On a donc $\frac{EB}{EA} = \frac{BD}{AC}$ d'où $\frac{EB}{EA} = \frac{1}{3}$. on en déduit que $EB = \frac{1}{3}EA$ et par conséquent que $BA = \frac{2}{3}EA$.

On peut également appliquer le théorème de Thalès aux triangles ABD et AEF dans lesquels on a donc :
$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BD}$ d'où $\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{3}$ Or il résulte de l'étape précédente que $\frac{AE}{AB} = \frac{3}{2}$, on en déduit que $\frac{EF}{3} = \frac{3}{2}$ donc que EF= $\frac{9}{2}$

Cette façon de procéder n'utilisant à aucun moment la mesure de AB, elle répond donc aux trois questions à la fois :
Si on fait varier AB sans autre changement dans l'énoncé, la longueur EF est toujours égale à $\frac{9}{2}$.