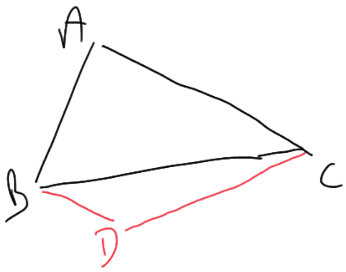
Préparation à l’écrit du CRPE, exercices d’entraînement variés (3).

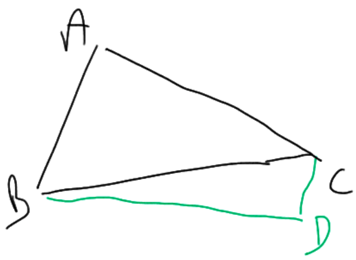
Exercice 1
On donne un triangle ABC.
Construire en utilisant exclusivement le compas et la règle non graduée un point D qui vérifie simultanément les deux conditions suivantes :

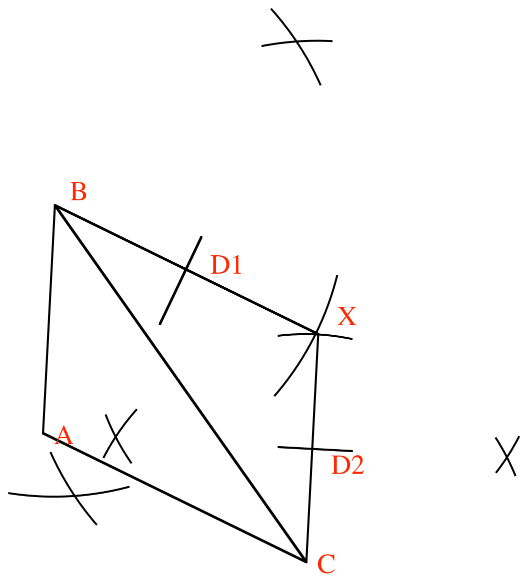
Le quadrilatère ABDC est un trapèze.
L’aire de ABDC est égale à 3/2 de l’aire de ABC.

Si plusieurs positions sont possibles pour le point D, on les indiquera toutes.

Comme pour tout problème de construction, il convient de commencer par un dessin à main levée.
On est alors conduit à se demander quels côtés du trapèze sont parallèles. Il y a deux situations à envisager : (AB) // (CD) ou (AC) // (BD).







Dans chacun des deux cas, le triangle BCD doit avoir une aire égale à la moitié de celle de ABC.
Une des façons d’obtenir ceci est de commencer par construire le parallélogramme ABXC. D peut alors être placé au milieu de [XB] ou au milieu de [XC].

Exercice 2
Déterminer tous les diviseurs du nombre 2 500.
Combien le nombre 125 000 a-t-il de diviseurs ?

2 500 comme 125 000 n’ont que des facteurs premiers égaux à 2 et à 5.
$2500 = 2^2 \times 5^4$ $\qquad$ $125\,000 = 2^3 \times 5^6$
On peut obtenir tous les diviseurs de 2500 à l’aide du tableau suivant :

	Pas de facteur 5	1 facteur 5	2 facteurs 5	3 facteurs 5	4 facteurs 5
Pas de facteur 2	1	5	25	125	625
1 facteur 2	2	10	50	250	1250
2 facteurs 2	4	20	100	500	2500

Un tableau analogue est possible pour 125 000. Il comporte 7 colonnes (de 0 à 6 facteurs 5) et 4 lignes.
Le nombre 125 000 a donc 28 diviseurs.

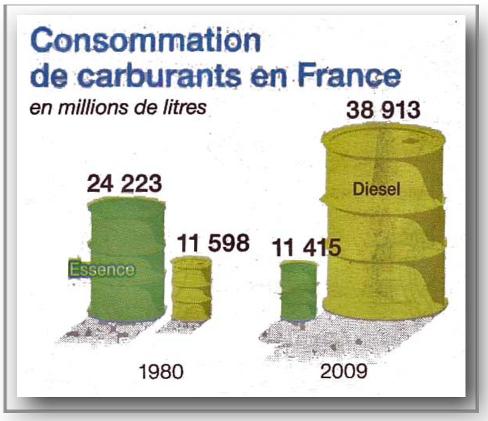
Remarque : si les nombres proposés avaient plus de deux facteurs premiers différents (par exemple $120 = 2^3 \times 3 \times 5$) L’utilisation d’un tableau à double entrée n’est plus possible, on utilise généralement dans ce cas une représentation en arborescence.

Exercice 3
Expliquer brièvement en quoi le graphique ci-contre, (Ouest France, dimanche 17 avril 2011) est incorrect.
Le pavé droit figurant sur le graphique ci-dessous a une contenance de 1600 litres.
Dessiner à la même échelle un pavé contenant 200 litres et un pavé contenant 3200 litres.

Dans un agrandissement, si les longueurs sont multipliées par k, les volumes sont multipliés par k^3.

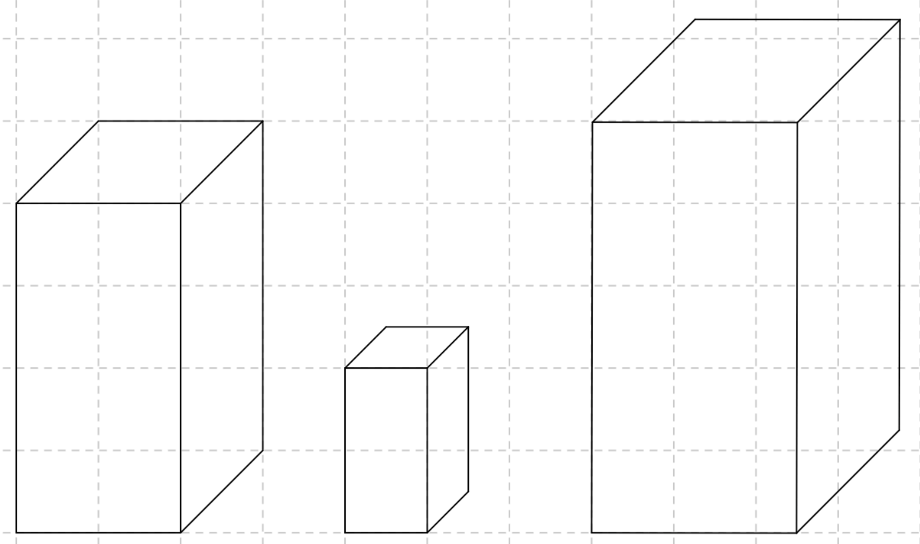
Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.

Si on compare les deux fûts de droite, la hauteur du plus grand des deux mesure plus de deux fois la hauteur du petit. Le volume du grand vaut donc plus de 8 fois le volume du petit, ce qui est incompatible avec les valeurs numériques.



Pour obtenir un fût d'une contenance 8 fois plus petite que le modèle, il suffit de diviser ses dimensions par 2.

Pour obtenir un fût d'une contenance double, on peut soit dessiner deux fûts l'un au dessus de l'autre ou côte à côte (ce qui poserait problème avec des fûts cylindriques) soit multiplier les dimensions du modèle par environ 1,26 puisque $1{,}26^3 = 2{,}000376$



Exercice 4

On cherche un nombre entier positif A vérifiant les trois conditions suivantes :

- **A s'écrit avec quatre chiffres.**
- **Dans la division euclidienne de A par 100, le reste est le double du quotient.**
- **Le chiffre des dizaines de A est égal à son chiffre des centaines.**

Déterminer toutes les valeurs possibles de A.

Le nombre A s'écrit $\overline{mddu}$. Le reste dans la division par 100 de A est $\overline{du}$, son quotient est $\overline{md}$, on a donc $\overline{du} = 2\ \overline{md}$

Essayons de façon systématique toutes les valeurs de d. pour chaque valeur de d, nous donnerons successivement à u les valeurs 0, 2 , 4 6 et 8 qui sont les seules possibles puisque $\overline{du}$ est pair et nous verrons si la valeur obtenue pour $\overline{md} = \overline{du} : 2$ convient.

Nous notons tous les nombres obtenus par ces essais, seuls ceux qui sont écrits en gros caractères conviennent. Les nombres en italiques ne sont pas des nombres à quatre chiffres dans leur écriture usuelle, si on les acceptait il faudrait ajouter 0000 aux solutions.

0000	*0102*	*0204*	*0306*	*0408*	*0510*	*0612*	*0714*	*0816*	*0918*	1020	1122	**1224**	1326
1428	1530	1632	1734	1836	1938	2040	2142	2244	2346	**2448**	**2550**	2652	2754
2856	2958	3060	3162	3264	3366	3468	3570	3672	**3774**	3876	3978	4080	4182
4284	4386	4488	4590	4692	4794	4896	**4998**						

Exercice 5

Pour tracer la perpendiculaire à la droite d passant par le point A, Arthur propose le programme de construction suivant :

Placer sur d deux points B et C tels que AB = AC.

Construire le milieu M de [AB] et le milieu N de [AC].

Construire la médiatrice de [MN], c'est la perpendiculaire à d passant par A.

La construction proposée par Arthur est-elle correcte ? Justifier.

La construction est correcte, en voici une justification dans le cas où A n'est pas sur la droite d (l'autre cas est plus facile).

M étant le milieu de [AB], on a AM = B/2. De même, AN = AC/2. De plus AB = AC donc AM = AN.

Dans le triangle AMN, isocèle en A, la médiatrice de [MN] est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{MAN}$, lequel est confondu avec $\widehat{BAC}$.

Dans le triangle ABC, isocèle en A, la bissectrice de $\widehat{BAC}$ est aussi la hauteur issue de A. cqfd

Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.

Exercice 6
Une machine fabrique une pièce en une minute et dix-sept secondes.
Combien de pièces cette machine fabriquera-t-elle si elle fonctionne en continu pendant 24 heures ?
Quel est le temps nécessaire pour que cette machine fabrique 20 000 pièces (en jours, heures, minutes et secondes) ?

Il s'agit en fait de convertir 20 000 x 17 secondes en jours heures minutes et secondes.
La division euclidienne de 340 000 par 3600 a pour quotient 94 et pour reste 1600
La durée nécessaire est donc de 94 heures et 1600 secondes soit 3 jours 22 heures 26 minutes et 40 secondes.

Exercice 7
Un grand tournoi de tennis rassemble 128 joueurs.
A chaque tour, tous les joueurs perdant leur match sont éliminés. Par exemple, au premier tour, 64 matchs sont disputés et les 64 perdants sont éliminés. Les gagnants sont opposés entre eux à l'occasion des 32 matchs du deuxième tour et ainsi de suite jusqu'à la finale.

Combien de matchs aura disputé le vainqueur du tournoi ?
Combien de matchs sont disputés en tout pendant le tournoi ?

Reprendre les mêmes questions pour un hypothétique tournoi rassemblant 2048 joueurs.

Le tennis martien se joue de façon très semblable au tennis terrien, mais à trois joueurs.
Lors d'un tournoi, à chaque partie il y a deux perdants qui sont éliminés.
Reprendre les questions précédentes pour un tournoi de tennis martien qui rassemble 729 joueurs.

Il y a 128 joueurs au premier tour, 64 au second, 32 au troisième, puis 16, 8, 4 et enfin 2 lors de la finale.
Le vainqueur a disputé un match lors de chaque tour, soit 7 matchs.
Chaque match élimine un joueur (si on considère que la finale élimine le perdant). Comme à la fin du tournoi 127 joueurs sont éliminés, il y a donc eu 127 matchs.

Si le tournoi comportait 2048 joueurs, les nombres de joueurs présents lors des tours suivants seraient 1024, 512, 256 puis les nombres trouvés lors de la question précédente. Il y aurait donc 4 tours de plus que dans le tournoi précédent soit 11 tours, le vainqueur disputerait 11 matchs.
Le nombre de matchs disputés serait de 2047.

Lors du tournoi martien, les nombres de joueurs à chaque tour seraient 729, 243, 81, 27, 9 et 3.
Le tournoi comporte 6 tours, le vaiqueur dispute 6 matchs.
Il faut éliminer 728 joueurs et deux joueurs sont éliminés à chaque match, donc 364 matchs sont disputés.