Préparation à l'écrit du CRPE, exercices d'entraînement variés (4).

Exercice 1

Parmi les nombres entiers de 0 à 1000, combien y en a-t-il qui sont à la fois multiples de 12 et multiples de 15 ?

Décomposons 12 et 15 en facteurs premiers.

12 = 2 x 2 x 3 15 = 3 x 5

Le plus petit multiple commun non nul à 12 et 15 est donc 2 x 2 x 3 x 5 = 60

Le multiples communs à 12 et 15 sont donc les multiples de 60.

Parmi les nombres entiers de 0 à 1000 ceux qui sont multiples de 60 vont de 0 x 60 = 0 à 16 x 60 = 960.

Il y en a donc 17.

Exercice 2

Quel est le plus grand diviseur commun aux nombres 11 840 et 8954 ?

11840 = 2 x 5 x 1184

11840 = 2^2 x 5 x 592

11840 = 2^3 x 5 x 296

11840 = 2^4 x 5 x 148

11840 = 2^5 x 5 x 74

11840 = 2^6 x 5 x 37

Les facteurs premiers d'un diviseur de 11840 ne peuvent être que 2, 5 ou 7, c'est donc en particulier le cas pour le pgcd de 11840 et 8954.

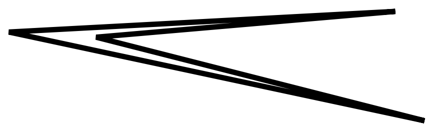
8954 = 2 x 4477 et 4477 est impair, le pgcd ne comporte donc qu'un facteur premier égal à 2

En posant la division euclidienne de 4477 par 37, voyons si 8954 est divisible par 37.

On trouve que 4477 = 121 x 37. 8954 est donc multiple de 37 et le pgcd de 8954 et 11840 est 2 x 37 = 74

Exercice 3

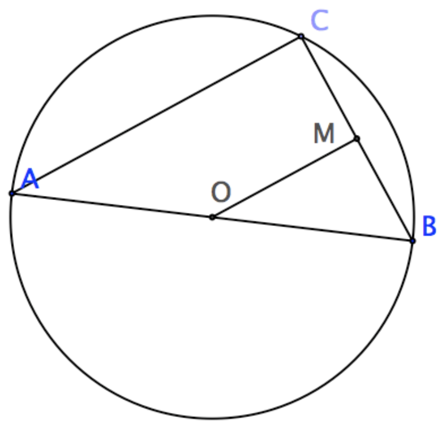
Est-il possible de construire un quadrilatère non croisé dont chacune des deux diagonales est plus courte que chacun des quatre côtés ?
On répondra soit en construisant un tel quadrilatère soit en justifiant l'impossibilité. Oui :



Exercice 4

On considère un cercle de centre O et de diamètre [AB]. C est un point situé sur ce cercle et tel que $\widehat{BAC} = 38°$.

M est le milieu de [BC]. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{COM}$.



***Remarque :** Les cheminements possibles sont particulièrement nombreux.*
Dans tous les cas, des propriétés qui semblent vraies sur la figure doivent être prouvées si elles sont utilisées. Par exemple, l'énoncé ne dit ni que ABC ou OBM sont rectangles, ni que (AC) est parallèle à (OM) ni que (OM) est la bissectrice de $\widehat{COB}$

Deux exemples de rédaction :

- A et C sont sur le cercle de centre O donc le triangle AOC est isocèle en O et $\widehat{ACO} = \widehat{CAO} = 38°$
- Dans le triangle ABC, la droite (OM) passe par les milieux de [AB] et [BC] donc elle est parallèle à (AC)
- Les angles $\widehat{ACO}$ et $\widehat{COM}$ sont alternes internes formés par les parallèles (AC) et (OM) et leur sécante (OC), ils sont donc égaux par conséquent $\widehat{COM} = 38°$.

- *L'angle au centre $\widehat{COB}$ et l'angle inscrit $\widehat{CAB}$ interceptent le même arc par conséquent $\widehat{COB} = 2\ \widehat{CAB}$*
- *B et C sont sur le cercle de centre O donc le triangle BOC est isocèle en O par conséquent sa médiane (OM) est aussi bissectrice de l'angle $\widehat{COB}$. Il en résulte que $\widehat{COM} = \widehat{COB} :2 = \widehat{CAB} = 38°$*

Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.

Exercice 5

	A	B	C	D	E	F	G
1	1	3	7	15	31	63	127
2	2	6	14	30	62	126	254
3	4	12	28	60	124	252	508
4	8	24	56	120	248	504	1016

Le tableau suivant a été construit à l'aide d'un tableur en entrant la valeur 1 dans la cellule A1 puis en écrivant des formules dans les cellules B1 et A2.

- *Proposer des formules pouvant convenir si la formule de B1 a été recopiée seulement vers la droite, celle de A2 vers la droite et vers le bas.*

Pour la cellule B1 : =2*A1+1 Pour la cellule A2 : =2*A1

- *Proposer des formules pouvant convenir si la formule de A2 a été recopiée seulement vers le bas, celle de B1 vers la droite et vers le bas.*

Pour la cellule A2 : =2*A1 Pour la cellule B1 : =2*A1+$A1 ou =(2*A$1+1)*$A1

Il est possible de trouver d'autres formules ayant les mêmes effets. en cas de doute, les tester sur un tableur.

Exercice 6
Un TGV parcourt 440 km.
Si on augmentait de 20% sa vitesse moyenne, on gagnerait 20 minutes sur la durée du trajet.
Quelle est la vitesse moyenne réelle de ce TGV ?

Si la vitesse augmente de 20%; elle est multipliée par $\frac{120}{100}$ soit $\frac{6}{5}$

A distance constante, la vitesse et la durée du trajet sont inversement proportionnelles, donc la durée est multipliée par $\frac{5}{6}$ ce qui revient à dire qu'elle est diminuée d'un sixième.
Par conséquent, les 20 minutes de gain correspondent à un sixième de la durée du trajet qui durait donc 120 minutes ou deux heures.
La vitesse du TGV et donc de 220 km/h.

Autre méthode :
Soit v la vitesse du TGV en km/h
La durée du trajet est égale à 440/v
Si la vitesse augmentait de 20%, elle serait égale à 1,2 v la durée serait alors égale à 440/1,2v
L'écart entre les deux durées est de 20 minutes soit 1/3 d'heure, on peut donc traduire le problème par l'équation suivante :

$$\frac{440}{v} = \frac{440}{1,2v} + \frac{1}{3}$$

$$440 = \frac{440}{1,2} + \frac{v}{3}$$

$$528 = 440 + 0,4v$$

$$88 = 0,4v$$

$$880 = 4v$$

$$v = 220$$

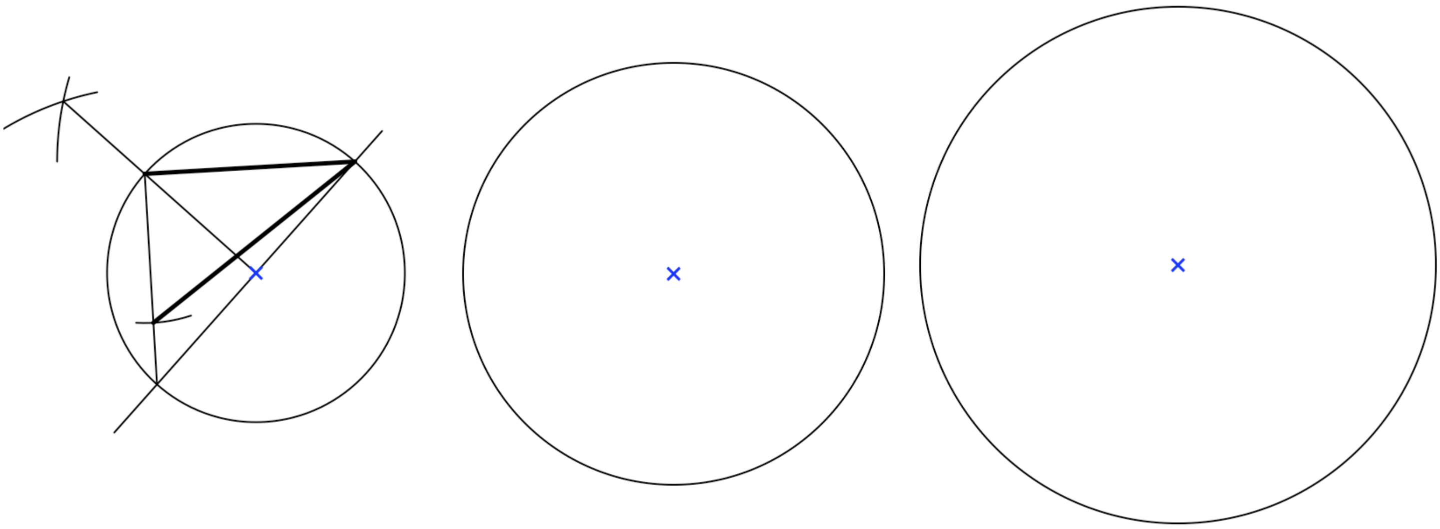
La vitesse du TGV est donc de 220 km/h

Exercice 7

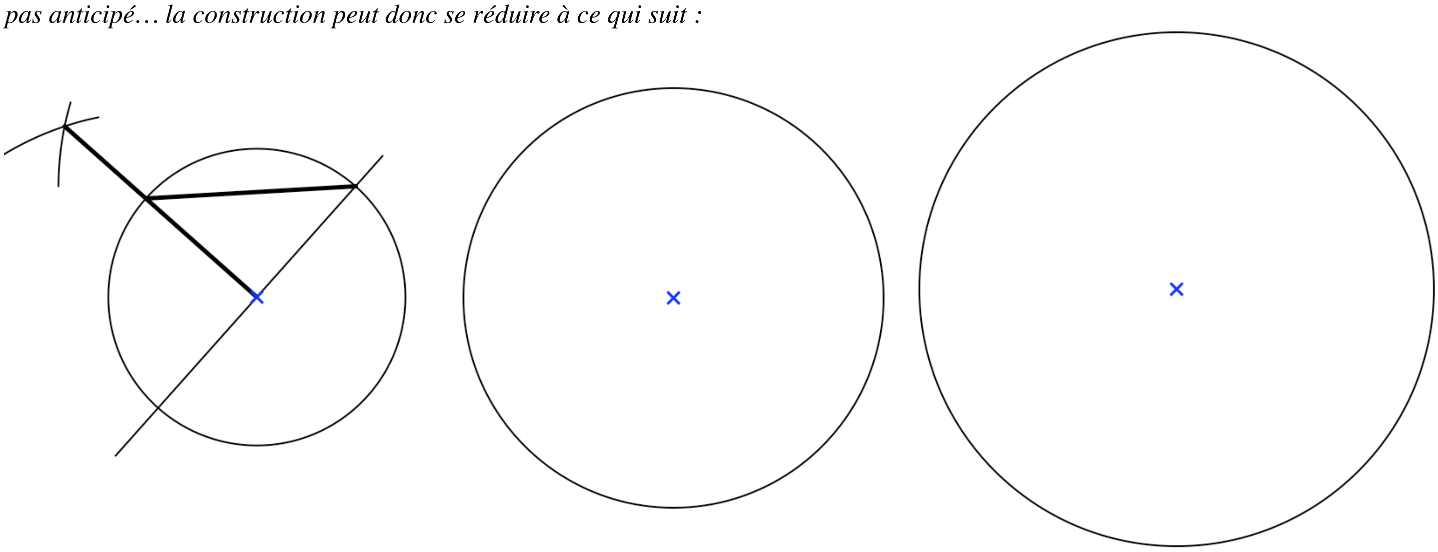
On donne un disque et son centre.
Construire à la règle et au compas un disque dont l'aire est le double de celle du disque initial.
Construire à la règle et au compas un disque dont l'aire est le triple de celle du disque initial.

Le disque obtenu est un agrandissement du disque initial. pour que l'aire soit doublée il faut que le rayon soit multiplié par $\sqrt{2}$. Pour que l'aire soit triplée, il faut que le rayon soit multiplié par $\sqrt{3}$.
Pour obtenir les disques demandés il faut donc construire à partir d'un rayon de longueur r des rayons de longueurs respectives $r\sqrt{2}$ et $r\sqrt{3}$
$r\sqrt{2}$ sera obtenu comme hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle dont les côtés de l'angle droit mesurent r
$r\sqrt{3}$ sera obtenu comme hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent r et $r\sqrt{2}$

La figure ci-dessous montre une manière économique en tracés d'obtenir ces rayons (en gras).



Remarque : en réalité un segment de longueur $r\sqrt{3}$ a été construit involontairement dès la première étape : comme on a utilisé un triangle équilatéral de côté 2r pour tracer la perpendiculaire au diamètre, la hauteur de ce triangle est $r\sqrt{3}$ … ce que nous n'avions pas anticipé… la construction peut donc se réduire à ce qui suit :



Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.