Feuille d'exercices n° 10

Exercice 1

Une voiture parcours 150 km.
Elle effectue une première partie du trajet à la vitesse moyenne de 80 km/h.
On notera x la longueur de cette partie, exprimée en km
Suite à un incident mécanique, une deuxième partie du trajet, de longueur égale à la moitié de la première partie, est effectuée à la vitesse de 40 km/h. Enfin, la fin du trajet est effectuée à 20 km/ h.

x est compris entre 0 et 100 km, on note t(x) la durée du trajet, exprimer t(x) en fonction de x.
représenter graphiquement la fonction t dans un repère orthogonal (on prendra comme échelle 1 cm pour 10 km et 1,5 cm pour une heure).

Utiliser le graphique ou le calcul pour répondre aux questions suivantes. Les réponses approchées sont acceptées à conditions qu'elles soient clairement signalées comme telles.

- Le trajet total a duré 4 heures, quelle distance la voiture avait-elle parcouru au moment où elle a dû réduire une première fois sa vitesse ?
- L'incident mécanique est survenu après 85 km, quelle a été la durée totale du trajet.
- Le trajet a duré 5 h 20 min, pendant combien de temps la voiture a-t-elle roulé à 20 km/h ?
- La voiture a parcouru 60 km à 20 km/ h, quelle a été la durée totale du trajet ?

Exercice 2

On considère un triangle ABC, rectangle et isocèle en A.
Construire le cercle inscrit dans le triangle ABC. On nommera O le centre du cercle, A' le point commmun au cercle et à [BC], B' le point commun au cercle et à [AC] et C' le point commun au cercle et à [AB].
Démontrer que AB'OC' est un carré.
On considère un cercle de centre P, donner un programme de construction d'un triangle rectangle isocèle dans lequel ce cercle est inscrit.
Démontrer que le triangle construit à l'aide de votre programme est bien isocèle rectangle.

Exercice 3

Pour vider une cave les pompiers emploient simultanément trois pompes.
La première pompe seule viderait la cave en 3 heures.
La deuxième pompe seule viderait la cave en 4 heures.
La troisième pompe seule viderait la cave en 6 heures.
En combien de temps la cave sera-t-elle vidée ?

Exercice 4

On considère les nombres entiers de cinq chiffres de la forme $\overline{abcba}$.
Parmi ces nombres :
Quel est le plus petit multiple de 9 ?
Quel est le plus grand multiple de 25 ?
Combien y a-t-il de multiples de 45 ?

Exercice 5

Ranger par ordre croissant les durées suivantes.

1,215 h	4375 s	72,8 min	1 h 12 min 53 s

$\frac{11}{9}$ h	$\frac{874}{12}$ min

Exercice 6

Paul doit construire la bissetrice d'un angle $\widehat{ABC}$, dont le sommet B n'est pas sur sa feuille.
Il suit pour cela le programme suivant :
Construire la parallèle à (BC) passant par A, et placer P sur cette droite, du même côté que C par rapport à (AB).
Construire la bissectrice de l'angle $\widehat{BAP}$, elle coupe (BC) en R.
Construire la médiatrice de [AR], c'est aussi la bissectrice de $\widehat{ABC}$.

Cette construction est-elle correcte ? Justifier.

Exercice 7

Pour une élection présidentielle, trois candidats sont en lice.
Les sondages, qui dans ce pays sont parfaitement fiables bien que parfois incomplets indiquent dans quel ordre les citoyens rangent les candidats. Le tableau ci-dessous donne les résultats d'un sondage.

Ordre de préférence	ABC	ACB	BAC	BCA	CAB	CBA
Pourcentage de citoyens choisissant cet ordre	?	?	21	20	4	15

- L'élection comporte un seul tour, le candidat arrivé en tête est élu même s'il n'a que la majorité relative. Le tableau ci-dessus suffit-il à dire qui va l'emporter ?

- L'élection suit les mêmes règles qu'en France. Le tableau ci-dessus permet-il de dire qui va l'emporter ?

Les résultats complets du sondage étaient les suivants :

Ordre de préférence	ABC	ACB	BAC	BCA	CAB	CBA
Pourcentage de citoyens choisissant cet ordre	5	35	21	20	4	15

- Quels seraient les résultats d'un duel A-B, d'un duel B-C, d'un duel C-A ?

- Enoncer une propriété supposée vraie pour les individus dans ce problème, mais qui n'est pas vraie pour la population dans son ensemble.

- Le candidat C est président en exercice, il dispose du sondage complet et du temps nécessaire pour modifier la loi électorale. Proposer une règle lui permettant d'être réélu.

Corrigé des exercices de la feuille n° 10

Exercice 1

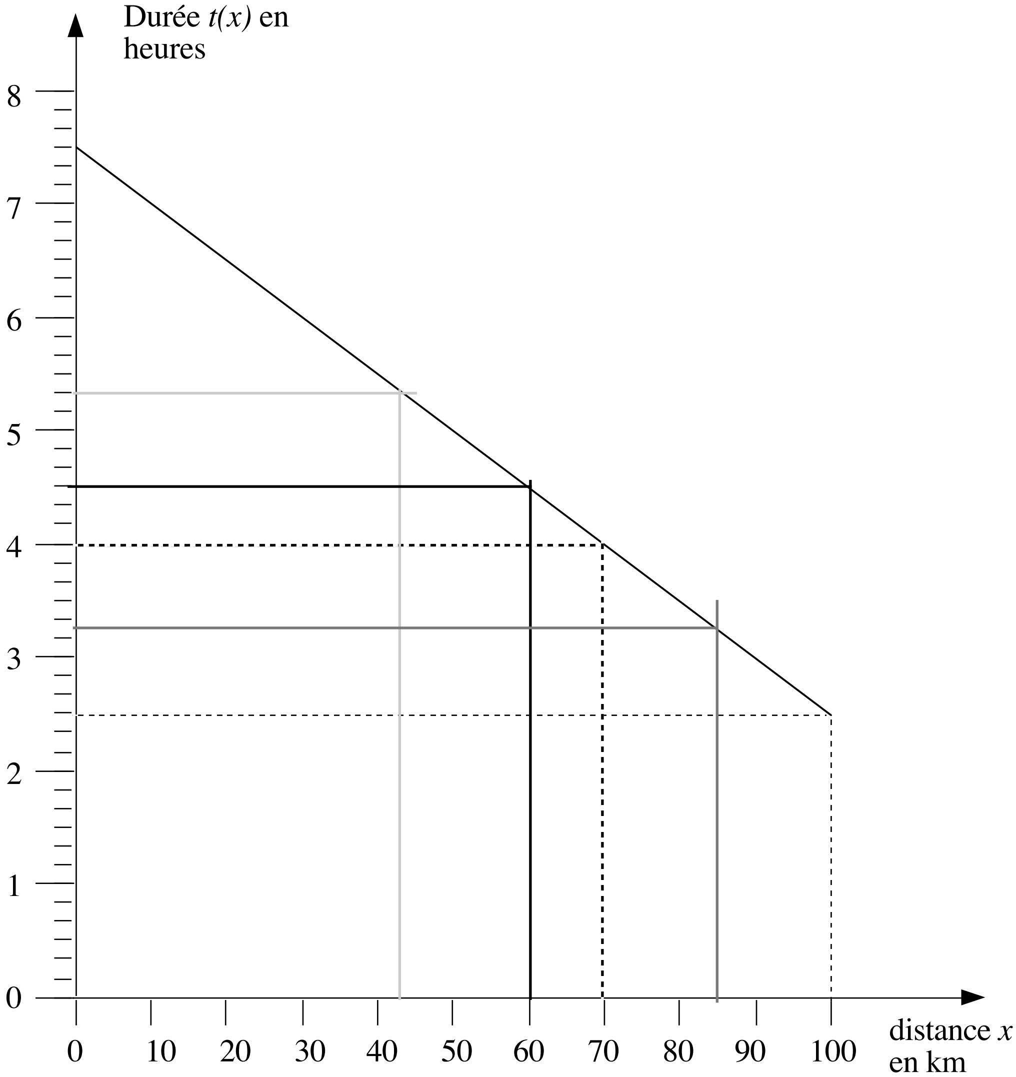
Les longueurs respectives des trois parties du trajet sont x, $x/2$, et 150 - x - $x/2$

Les durées correspondantes (en heures) sont donc : $\frac{x}{80}$, $\frac{\frac{x}{2}}{40}$ et $\frac{150 - x - \frac{x}{2}}{20}$

La durée totale est alors :

$$t(x) = \frac{x}{80} + \frac{\frac{x}{2}}{40} + \frac{150 - x - \frac{x}{2}}{20} = \frac{x}{80} + \frac{x}{80} + \frac{600 - 6x}{80} = \frac{600 - 4x}{80} = 7{,}5 - \frac{x}{20}$$

t est une fonction affine, sa représentation est donc une droite.
Pour la tracer il suffit de placer deux points.
On peut utiliser par exemple les points qui représentent t(0) = 7,5 et t(100) = 2,5.



- Si le trajet a duré en tout 4 heures, la distance x à laquelle la voiture a réduit sa vitesse est selon le graphique d'environ 70 km.

En utilisant l'expression de *t(x)* établie plus haut, on trouve :

$$7{,}5 - \frac{x}{20} = 4$$

$$150 - x = 80$$

$$x = 70$$

La distance cherchée est donc égale à 70 km.

- Si l'incident est survenu après une distance x de 85 km, la durée du trajet est selon le graphique d'environ 3 h 15 min.

En utilisant l'expression de *t(x)* établie plus haut, on trouve une durée de :

$7{,}5 - \frac{85}{20} \quad = \quad 7{,}5 - 4{,}25 \quad = \quad 3{,}25\ h$ soit exactement 3 h 15 min.

- Si le trajet a duré en tout 5 h 20 minutes, le graphique montre que la distance x est d'environ 43 km. La distance parcourue à 20 km/h est alors d'environ 85,5 km ce qui correspond à une durée d'un peu plus de 4 heures et quart.

L*a conversion précise de 4,275 en heures minutes et secondes n'a pas d'intérêt puisque la distance 85,5 n'est qu'approchée.*

En utilisant l'expression de *t(x)* établie plus haut, on trouve :

$$7{,}5 - \frac{x}{20} = 5 + \frac{1}{3}$$

$$450 - 3x = 300 + 20$$

$$3x = 130$$

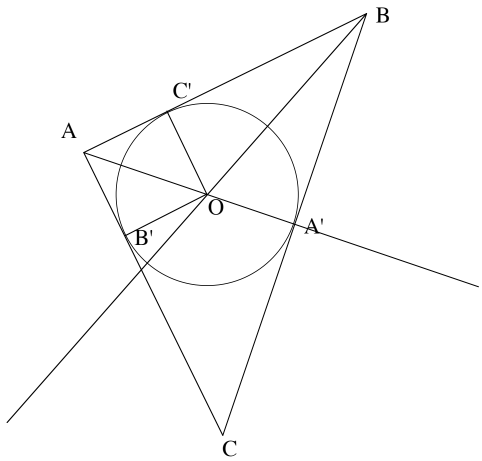
$$x = \frac{130}{3}$$

La distance parcourue à 20 km/ h est alors égale à $150 - \frac{130}{3} - \frac{65}{3} = \frac{255}{3}$

La durée en heures est alors égale à $\frac{255}{3} / 20$ soit $\frac{255}{60}$ ce qui correspond à 255 min, ou 4 h 15 min exactement.

Si la voiture a parcouru 60 km à 20 km/h, elle en avait parcouru 90 auparavant, dont les deux tiers, c'est à dire également 60 km à 80 km/h.
Ce trajet correspond donc à une valeur de x de 60, ce qui permet de déterminer à l'aide du graphique que la durée totale est d'environ 4 h 30 min, ou par le calcul qu'elle est exactement de 4 h 30 min.

Exercice 2



Le cercle inscrit dans un triangle est tangent aux trois côtés du triangles.
De plus une tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon du cercle qui a pour extrémité le point commun au cercle et à la droite.
Il en résulte que les angles OC'A et OB'A sont droits.
L'angle B'AC' est également droit puisque ABC est rectangle en A.
Le quadrilatère AB'OC' a trois angles droits, c'est donc un rectangle.
[OB'] et [OC'] sont des rayons du même cercle, donc ils ont la même longueur.
Le rectangle AB'OC' a deux côtés consécutifs ([OB'] et [OC']) de même longueur, par conséquent c'est un carré.

Programme de construction :

- Construire deux rayons perpendiculaires, [PC'] et [PB']
- Construire A tel que PB'AC' soit un carré.
- La droite (AO) coupe le cercle en deux points, on appelle A' celui des deux qui n'est pas sur [AO]
- Construire la droite d, perpendiculaire à (AA') et passant par A'.
- Nommer B l'intersection de (AC') et d, C l'intersection de (AB') et d
- ABC est le triangle cherché.

Démontrons que le triangle ABC obtenu est isocèle rectangle en A.
OB'AC' est un carré, donc (AB') et (AC') sont perpendiculaires, or ces droites ne sont autres que (AC) et (AB). Le triangle ABC est donc rectangle en A.

Le point O est à égale distance des côtés de l'angle BAC (la distance commune est le rayon du cercle), il est donc situé sur la bissectrice de cet angle.
La droite (AO) est la bissectrice de BAC, donc les demi droites [AB) et [AC) sont symétriques par rapport à (OA).
La droite d est perpendiculaire à (OA), donc elle est symétrique par rapport à (OA).
Considérons le symétrique du point B par rapport à (OA)

Comme B est sur [AB), son symétrique est sur [AC)

Comme B est sur d, son symétrique est également sur d.

Le symétrique de B étant sur [AC) et sur d, c'est le point C.

Les segments [AB] et [AC] sont donc symétriques par rapport à (OA), il en résulte qu'ils ont la même longueur, le triangle ABC est donc isocèle en A.

Remarque *: cette démonstration est critiquable sur le point suivant :*
Le programme demande de placer A pour que PB'AC' soit un carré, encore faut-il que ce soit possible, on peut considérer nécessaire de le prouver. Si on adopte ce point de vue, il faut détailler le programme (faire construire les perpendiculaires aux rayons en B' et C', lesquelles se coupent en A). On démontre alors que l'on obtient bien un carré comme dans la première partie de l'exercice.

Exercice 3
En 12 heures :

La première pompe seule viderait 4 caves (car 12 heures = 4 x 3 heures)
La deuxième pompe seule viderait 3 caves.
La troisième pompe seule viderait 2 caves.

Les trois pompes simultanément videraient donc 9 caves en 12 heures.
Le temps nécessaire, en heures pour vider une cave est donc 12/9 ou 4/3, ce qui correspond à une heure et 20 minutes.
Remarque *: cette méthode purement arithmétique se base principalement sur l'idée que les raisonnements sur les vitesses ou les débits sont toujours plus faciles en se ramenant à une même durée.*
Le fait de choisir comme durée commune 12 (ppcm de 3 4 et 6) est une astuce qui facilite le calcul, mais n'est pas fondamental dans le raisonnement. Le même raisonnement fonctionne très bien avec une heure (les pompes vident respectivement 1/3 1/4 et 1/6 de cave, ensemble elles vident donc 1/3 + 1/4 + 1/6 soit 9/12 de cave.

Exercice 4

Les plus petits nombres de la forme $\overline{abcba}$ sont ceux pour lesquels $a = 1$ et $b = 0$.
Parmi les nombres de la forme $\overline{10c01}$, seul 10701 est divisible par 9, c'est donc le nombre cherché.

Les nombres multiples de 25 se terminent par 00, 25, 50 ou 75.
Cependant, le dernier chiffre ne peut pas être 0 car, compte tenu de la forme $\overline{abcba}$ le nombre s'écrirait alors avec 3 chiffres seulement.
Les multiples de 25 de la forme $\overline{abcba}$ sont donc d'un des deux types suivants :
$\overline{52c25}$ ou $\overline{57c75}$ le plus grands de ces nombres est donc 57975.

Les multiples de 45 sont les nombres qui sont à la fois multiples de 5 et de 9.
Pour la même raison qu'à la question précédente, les multiples de 5 cherchés ne peuvent pas se terminer par 0, mais seulement par 5, ils sont donc de la forme $\overline{5bcb5}$
Un nombre de cette forme est multiple de 9 si et seulement si 2b + c + 10 est multiple de 9
Autrement dit si 2b + c + 1 est multiple de 9.
Etudions systématiquement toutes les valeurs possibles de b et cherchons s'il existe des valeurs de c permettant de réaliser cette condition.

Valeur de b	2b + 1	Valeur(s) de c pour que 2b + 1 + c soit multiple de 9	Nombre obtenu
0	1	8	50805
1	3	6	51615
2	5	4	52425
3	7	2	53235
4	9	**0 ou 9**	**54045 et 54945**
5	11	7	55755
6	13	5	56565
7	15	3	57375
8	17	1	58185
9	19	8	59895

Il y a donc 11 multiples de 45 de la forme $\overline{abcba}$.

Exercice 5

Pour comparer les durées en question, il faut les exprimer dans la même unité.
Nous choisisons ici de tout exprimer en secondes.

1,215 x 3600 s = 4374 donc 1,215 h = 4374 s
72,8 X 60 s = 4368 donc 72,8 min = 4368 s
12 min = 720 s. 3600 + 720 + 53 = 4373 donc 1 h 12 min 53 s = 4373 s

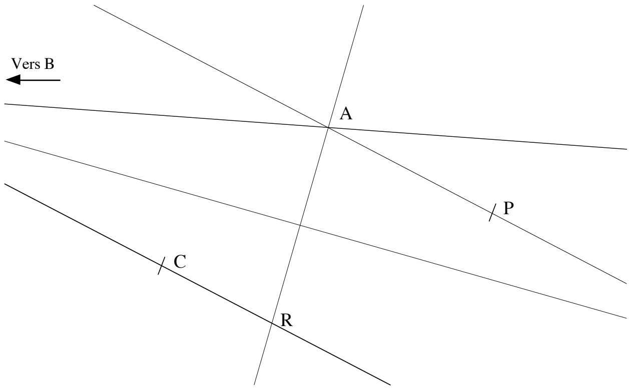
$\frac{11}{9}$ x 3600 = 11 x 400 = 4400, donc $\frac{11}{9}$ h = 4400 s.

$\frac{874}{12}$ x 60 = 874 x 5 = 4370, donc $\frac{874}{12}$ min = 4370 s.

En comparant ces différents résultats, on obtient le rangement suivant :

$$72{,}8 \text{ min} < \frac{874}{12} \text{ min} < 1 \text{ h } 12 \text{ min } 53 \text{ s} < 1{,}215 \text{ h} < 4375 \text{ s} < \frac{11}{9} \text{ h}$$

Exercice 6



[AR) est la bissectrice de BAP, donc les angles BAR et RAP sont égaux.
Les angles BRA et RAP sont alternes internes, formés par les droites parallèles (AP) et (CR) et leur sécante (AR), donc ils sont égaux.
BAR = RAP et RAP = BRA, donc BAR = BRA.
Dans le triangle BAR, les angles de sommets A et R sont égaux, donc BAR est isocèle en A.
BAR est isocèle en A, donc la médiatrice de [BR] est aussi la bissectrice de BAR.

Exercice 7

Selon le tableau, 41% des électeurs votent pour B et 19% pour C, Les 40% restants votent donc pour A, c'est donc B qui est élu dans l'élection à un seul tour.

Si l'élection suit les mêmes règles qu'en France, le deuxième tour opposera les candidats A et B. Le électeurs dont l'ordre de préférence est BAC, BCA ou CBA voteront B au second tour, ils seront 56% donc B sera élu.

Selon le tableau complet :
Un duel A-B est remporté par B avec 56% des suffrages.
Un duel B-C est remporté par C avec 54% des suffrages.
Un duel A-C est remporté par A avec 60% des suffrages.

Pour un individu, on suppose généralement que s'il préfère X à Y et Y à Z, alors il préfère X à Z (cette propriété s'appelle la transitivité). Les trois résultats précédents montrent que cela n'est pas vrai pour une population, qui peut préférer B à A, A à C et cependant pas B à C.

Nouvelle loi électorale :
Si le président en exercice se représente, le premier tour de l'élection se déroulera sans lui et aura pour but de désigner le candidat qui lui sera opposé au second tour.
Selon cette règle, le premier tour voit la victoire de B, qui affronte C au deuxième tour et est battu.