Groupe seconde chance
Fiche d'exercice n° 11

Exercice 1
On s'intéresse aux diviseurs de 4900.
Parmi eux :
Quel est le plus petit nombre qui n'est diviseur ni de 49 ni de 100 ?
Quel est le plus grand nombre qui n'est multiple ni de 49 ni de 100 ?

On s'intéresse aux diviseurs de 3600.
Parmi eux :
Quel est le plus petit nombre qui n'est diviseur ni de 36 ni de 100 ?
Quel est le plus grand nombre qui n'est multiple ni de 36 ni de 100 ?

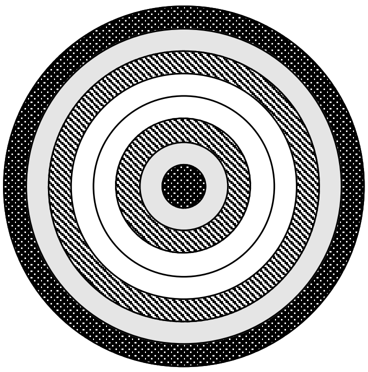
Exercice 2
Montrer qu'un nombre qui s'écrit $\overline{aabb}$ en base 9 est divisible par 10.

Exercice 3
ABC est un triangle sur lequel on possède les informations suivantes :
La hauteur issue de A mesure 12 cm.
Le pied H de cette hauteur est situé sur [BC], à 9 cm de B et 16 cm de C.

La perpendiculaire à (AB) passant par H coupe (AB) en X
La perpendiculaire à (AC) passant par H coupe (AC) en Y

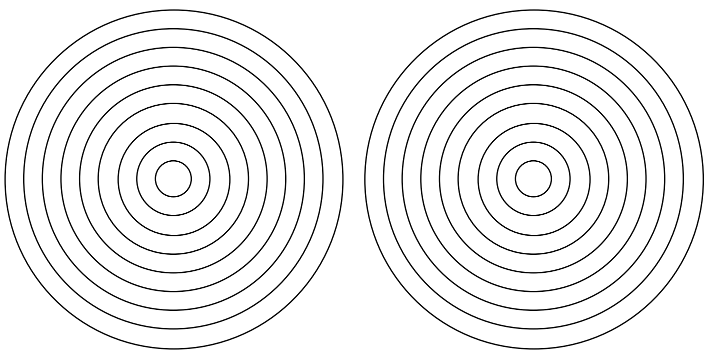
Démontrer que le quadrilatère AXHY est un rectangle dont on calculera l'aire.

Exercice 4



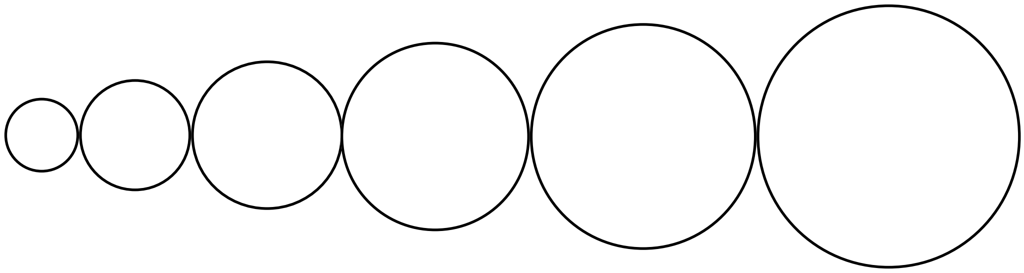
Sur la cible ci-contre, les cercles ont des rayons respectivement double, triple, quadruple…du rayon du petit cercle central.
On a partagé la cible en quatre zones, coloriée chacune d'une couleur différente (chaque zone est constituée de deux anneaux, ou du disque central et d'un anneau).
Montrer que les quatre zones ont la même aire.

On considère une cible tracée selon le même principe, mais avec maintenant 9 cercles au lieu de 8. Partagez la de deux façons différentes en 3 zones d'aires égales, sans découper les anneaux.



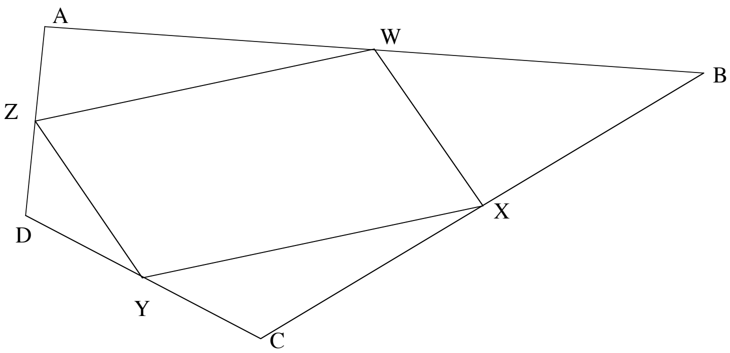
Exercice 5
On dispose d'un grand nombre de pavés droits identiques.
Leurs arêtes mesurent respectivement 2 cm, 3 cm et 4 cm.
En posant certains de ces pavés sur un carré de 9 cm de côté, est il possible de le recouvir exactement ?
On répondra soit en fournissant une figure montrant la disposition des pavés sur le carré, soit en expliquant l'impossibilité.
Même question avec des pavés dont les arêtes mesurent respectivement 3 cm, 4 cm et 5 cm.

Exercice 6



Le schéma ci dessus représente un engrenage de 6 roues dentées ayant respectivement 12, 18, 24, 30, 36 et 42 dents.
On fait faire 10 tours à la plus grande roue, combien de tours effectue la plus petite ?

Exercice 7



ABCD est un quadrilatère quelconque, W, X, Y et Z sont les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD] et [DA].

1. Montrer que l'aire de ZWA est le quart de celle de DBA.
2. En déduire que l'aire de WXYZ est égale à la moitié de celle de ABCD.
3. Quelle est la nature de WXYZ (justifier)
4. A l'aide de ce qui précède, donner un procédé pour calculer l'aire de ABCD en prenant seulement deux mesures sur la figure.

Exercice 8
Une organisation humanitaire doit transporter 100 personnes et 90 tonnes de matériel.
Elle dispose pour cela de deux types d'hélicoptères. Le type A peut transporter 12 personnes et 30 tonnes de matériel, le type B peut transporter 20 personnes et 10 tonnes de matériel.
L'organisation souhaite utiliser le plus petit nombre possible d'hélicoptères, combien doit-elle affréter d'appareils de chaque type ?

Exercice 9
Un quadrilatère non croisé a deux angles droits, et ses deux diagonales ont la même longueur.
Ce quadrilatère est-il nécessairement un rectangle ?

Correction des exercices de la fiche n° 11

Exercice 1

Décomposons 4900 en facteurs premiers : $4900 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7$

On a par ailleurs $49 = 7 \times 7$ et $100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5$

14 est le plus petit diviseur de 4900 qui ne divise ni 49 ni 100.

En effet, on peut vérifier que tous les diviseurs de 4900 inférieurs à 14 (1, 2, 4, 5, 7 et 10) divisent 49 ou 100.

$350 = 7 \times 2 \times 5 \times 5$ est le plus grand diviseur de 4900 qui n'est multiple ni de 49 ni de 100.

en effet les diviseurs de 4900 supérieurs à 350 sont 4900, 2450, 1225, 980, 700, 490 qui sont tous multiples de 49 ou de 100.

Décomposons 3600 en facteurs premiers : $3600 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$

On a par ailleurs $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$ et $100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5$

8 est le plus petit diviseur de 3600 qui ne divise ni 36 ni 100.

En effet, tous les diviseurs de 3600 inférieurs à 8 (1, 2, 3, 4, 5 et 6) divisent 36 ou 100.

$450 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$ est le plus grand diviseur de 3600 qui n'est multiple ni de 36 ni de 100.

En effet, les diviseurs de 3600 supérieurs à 450 sont les nombres suivants :

3600, 1800, 1200, 900, 720, 600. Chacun de ces nombres est multiple de 100 ou de 36.

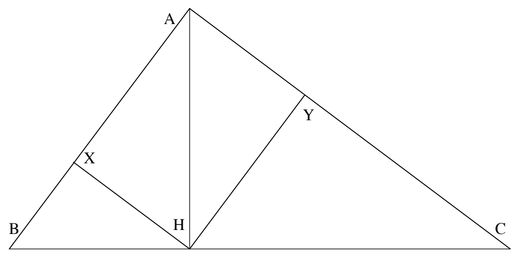
Exercice 2

Un nombre qui s'écrit $\overline{aabb}$ en base 9 est égal à :

b + 9 b + 81a + 729 a = 10 b + 810 a = 10 (b + 81 a). Il est donc divisible par 10.

Exercice 3

En appliquant le théorème de Pythagore successivement aux triangles rectangles ABH et ACH, on montre que AB = 15 cm, et AC = 20 cm.



On a alors d'une part $BC^2 = 25 \times 25 = 625$

D'autre part $AB^2 + AC^2 = 15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625$

On constate que $AB^2 + AC^2 = BC^2$ et on en conclut (réciproque du théorème de Pythagore) que le triangle ABC est rectangle en A.

Calcul de l'aire (première méthode)

Le quadrilatère AXHY a donc trois angles droits, par conséquent c'est un rectangle.Le triangle AXH a des angles de même mesure que ABH, qui lui même a des angles de même mesure que ABC. AXH est donc une réduction de ABC. Le coefficient de cette réduction est égal à AH/BC, soit 12/25.

L'aire de AXH est égale à celle de ABC multipliée par le carré de ce coefficient. On a donc :

$$\text{Aire (AXH)} = \frac{12 \times 25}{2} \times \left(\frac{12}{25}\right)^2 = \frac{6 \times 144}{25} = \frac{24 \times 144}{100} = 34{,}56 cm^2$$

L'aire du rectangle AXHY est le double de celle de AXH, elle mesure donc $69{,}12 cm^2$

Calcul de l'aire (deuxième méthode)

L'aire de ABH est égale à $\frac{AH \times BH}{2}$, elle est aussi égale à $\frac{AB \times XH}{2}$.

On a donc $AH \times BH = AB \times XH$ d'où on tire $XH = \frac{AH \times BH}{AB} = \frac{12 \times 9}{15} = 7,2$

En procédant de la même manière dans le triangle ACH, on obtient $YH = \frac{AH \times CH}{AC} = \frac{12 \times 16}{20} = 9,6$

L'aire du rectangle AXHY est donc égale à 7,2 x 9,6 soit $69,12 cm^2$

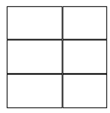
Exercice 4

Quand le rayon d'un cercle est multiplié par k, son aire est multipliée par k^2.
Si on prend comme unité d'aire celle du cercle central, les différents cercles ont donc pour aires 1,4, 9, 16, 25, 36, 49 et 64.
L'aire d'un anneau est la différence des aires de deux cercles successifs, les anneaux ont donc pour aires : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 et 15.
Les quatre zones ont donc respectivement des aires qui mesurent :
1 + 15, 3 + 13, 5 + 11, et 7 + 9. Ces aires sont bien égales.

Sur une cible constituée de 9 cercles, l'aire du plus grand cercle est 81.
Pour partager en trois zones d'aires égales, elles devront mesurer 27.
Une possibilité est d'avoir les regroupements suivants : 1 + 9 + 17 5 + 7 + 15 3 + 11 + 13
Une autre possibilité : 3 + 7 + 17 1 + 11 + 15 5 + 9 + 13.

Exercice 5

Les faces des pavés de la première question ont des aires qui mesurent 6 cm^2, 8 cm^2, ou 12 cm^2.
Ces mesures sont toutes des nombres paires, la somme d'un certain nombre de fois chacune d'entre elle ne peut donc pas être égale à 81. Il est donc impossible de recouvrir exactement le carré donné.
Pour les pavés dont les arêtes mesurent 3 cm 4 cm et 5 cm, le schéma ci-contre est une vue de dessus d'une disposition possible.



Exercice 6

10 tours de la grande roue correspondent à un déplacement de 420 dents.
Le déplacement mesuré en nombre de dents est le même pour toutes les roues.
La petite roue aura donc effectué 420/12 = 35 tours.
On remarque au passage que cela ne dépend en rien de la taille et du nombre des roues intermédiaires (seul le sens de rotation dépend du nombre de roues intermédiaires).

Exercice 7

1. Dans le triangle DBA, W et Z sont les milieux respectifs de [AB] et [AD], on a donc WZ = BD/2.

Le triangle ZWA, donc les côtés mesurent la moitié de ceux de DBA, est une réduction de celui-ci, le coefficient de la réduction étant ½.
Par conséquent, l'aire de ZWA est le quart de celle de DBA.

2. On montrerait de la même façon que les triangles BWX, CXY et DYZ ont des aires égales respectivement au quart des aires de ABC, BCD et CDA.

On a donc $aire(ZWA) + aire(CXY) = \frac{aire(ABD)}{4} + \frac{aire(BCD)}{4} = \frac{aire(ABD) + aire(BCD)}{4} = \frac{aire(ABCD)}{4}$

De même, on a $aire(BWX) + aire(DYZ) = \frac{aire(ABCD)}{4}$

On en déduit que la somme des aires des quatre triangle vaut la moitié de l'aire de ABCD, il en est donc de même pour le quadrilatère central WXYZ.

3. Dans le triangle DBA, W et Z sont les milieux respectifs de [AB] et [AD], donc (ZW)//(BD)

Dans le triangle DBC, X et Y sont les milieux respectifs de [BC] et [CD], donc (XY)//(BD).
(ZW)//(BD) et (XY)//(BD) donc (ZW)//(XY).
On démontre de la même façon que (WX)//(YZ) et on en déduit que le quadrilatère WXYZ est un parallélogramme car ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.

4. Pour calculer l'aire du parallélogramme WXYZ, deux mesures suffisent : celle d'un côté et celle de la hauteur correspondante.

On calcule alors l'aire de WXYZ en multipliant ces deux mesures, puis on double le résultat obtenu pour trouver l'aire de ABCD.

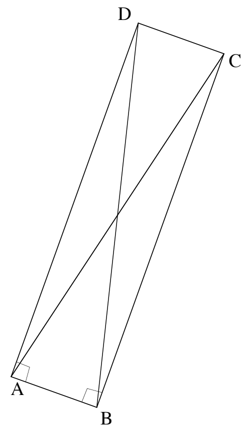
Exercice 8

		Nombre d'appareils de type A					
		0	1	2	3	4	5
Nombre d'appareils de type B	0	0 p 0 t	12 p 30 t	24 p 60 t	36 p 90 t	48 p 120 t	60 p 150 t
	1	20 p 10 t	32 p 40 t	44 p 70 t	56 p 100 t	68 p 130 t	80 p 160 t
	2	40 p 20 t	52 p 50 t	64 p 80 t	76 p 110 t	88 p 140 t	100p 170t
	3	60 p 30 t	72 p 60 t	84 p 90 t	96 p 120 t	108p 150t	120p 180t
	4	80 p 40 t	92 p 70 t	104p 100t	116p 130t	128p 160t	140p 190t
	5	100 p 60 t	112p 80t	124p 110t	136p 140t	148p 170t	160p 200t

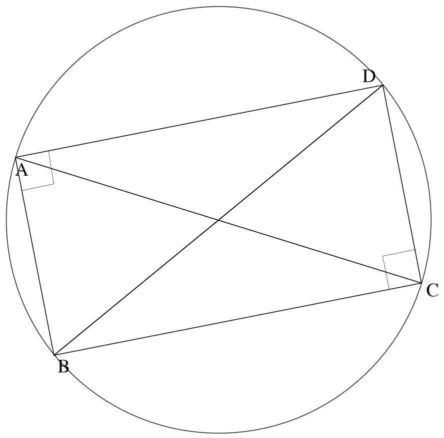
Le tableau ci-dessus montre que 2 appareils A et 4 appareils B suffisent, et que toutes les autres combinaisons avec seulement 6 appareils ne conviennent pas.
Il faudrait ajouter une ligne et une colonne pour montrer les cas 6 appareils A seulement et 6 B seulement.

Exercice 9

Premier cas : les sommets des angles droits sont consécutifs.



En utilisant les notations de la figure ci contre, les triangles ABD et ABC sont rectangles, ils ont des hypothénuses égales et le côté [AB] en commun, par conséquent les autres côtés de l'angle droit sont également égaux : AD = BC.
Les droites (AD) et (BC) sont perpendiculaires à (AB), donc elles sont parallèles entre elles.
Le quadrilatère non croisé ABCD a deux côtés parallèles et de même longueur, c'est donc un parallélogramme. Comme de plus il a un angle droit, c'est un rectangle.



Deuxième cas : les sommets des angles droits sont opposés.

ABD est rectangle en A, donc A est sur le cercle de diamètre [BD]
CBD est rectangle en C, donc C est sur le cercle de diamètre [BD]
[AC] est une corde de ce cercle dont la longueur est égale à celle du diamètre [BD], [AC] est donc également un diamètre.
Les diagonales du quadrilatère ABCD ont même longueur et même milieu puisque ce sont deux diamètres d'un même cercle, par conséquent ABCD est un rectangle.