Groupe seconde chance
Feuille d'exercices n°6

Exercice 1

On appelle triangles pythagoriciens les triangles rectangles dont les trois côtés ont pour mesure un nombre entier.
Soit a, b, c les mesures des côtés d'un triangle pythagoricien.

- Démontrer que l'un au moins des trois nombres a b et c est pair.
- Montrer que si k est un nombre entier positif, le triangle dont les côtés mesurent ka, kb et kc est pythagoricien.

Dans la suite de cet exercice, t désigne un nombre entier plus grand que 1

- Montrer qu'un triangle dont les côtés mesurent respectivement 2t, t^2 - 1 et t^2 + 1 est pythagoricien, mais que la réciproque n'est pas vraie.
- Trouver deux triangles pythagoriciens différents dont un côté mesure 26
- Trouver 5 triangles pythagoriciens différents dont un côté mesure 48.

Exercice 2

A_1 A_2 A_3…..A_{12} est un dodécagone régulier, inscrit dans un cercle de centre O.

- Calculer la mesure de l'angle $\widehat{OA_3A_2}$

On appelle P l'intersection de [A_1 A_4] et de [OA_3],

- Calculer la mesure de l'angle $\widehat{OPA_1}$
- En déduire que les droites (A_1A_4) et (A_2A_3) sont parallèles

On appelle R l'intersection de [A_1 A_5] et de [OA_2], S l'intersection de [A_1 A_5] et de [OA_4],

- Calculer la mesure de l'angle $\widehat{OSA_1}$, en déduire la nature du triangle ORS.

Exercice 3

Tracer à la règle graduée un segment [AB] de 4cm de long puis construire à l'aide seulement de la règle non graduée et du compas le pentagone convexe ABCDE ayant toutes les propriétés suivantes :

- AB = BC = AE
- Les angles de sommet A et C mesurent 135°
- Les angles de sommets B et D sont droits.

Démontrer que le quadrilatère ACDE est un rectangle, en déduire le périmètre du pentagone ABCDE.

Exercice 4

a) On considère les fractions $\frac{47}{45}$ et $\frac{33}{34}$

Donner une méthode permettant de comparer ces deux fractions sans les réduire au même dénominateur ni effectuer les divisions correspondantes.

b) Même question que a) pour les fractions $\frac{24}{23}$ et $\frac{38}{37}$

Même question que a) pour les fractions $\frac{900}{1050}$ et $\frac{1600}{1800}$

Exercice 5

Un cycliste effectue un trajet constitué de trois parties de 12 km chacune.
Il parcourt la première partie du trajet à 30 km/h, et la deuxième à 20 km/h.

a) Quelle est sa vitesse moyenne, en km/h, sur l'ensemble des deux premières parties du trajet.
b) Quelle doit être sa vitesse moyenne sur la troisième partie pour que la vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet soit de 27 km/h ?

Exercice 6
N est un nombre entier qui s'écrit $\overline{abcd}$ en base 5. La somme des chiffres a b c et d est multiple de 4.
Montrer que N est lui même multiple de 4.

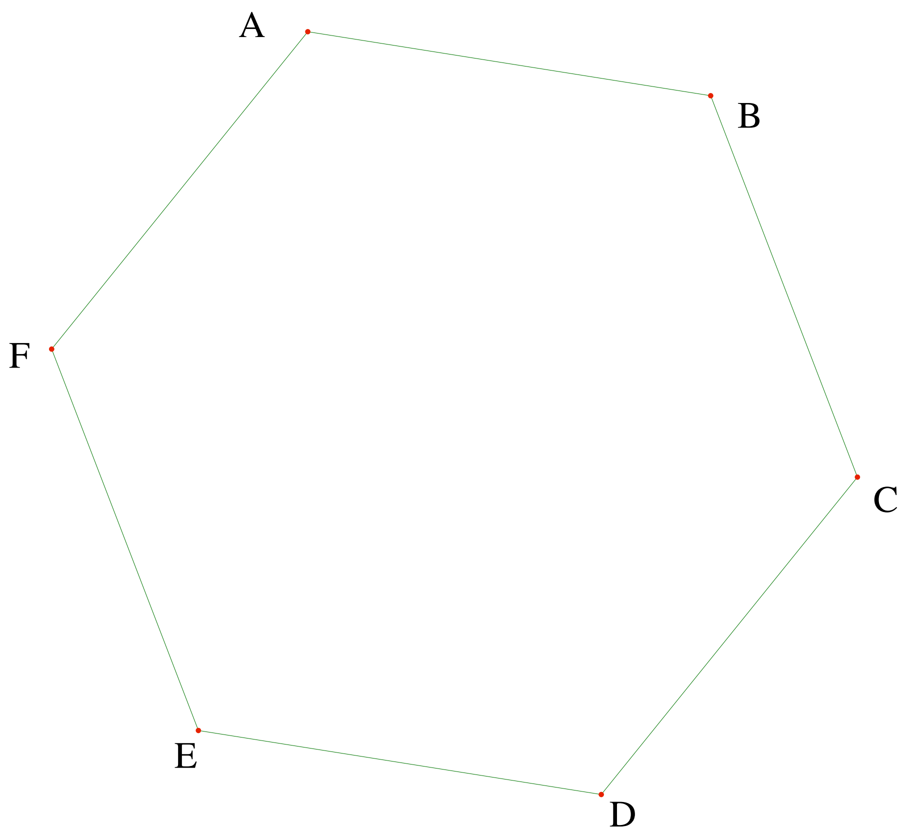
Exercice 7
Les affirmations ci-dessous sont-elles vraies ? (justifier)
Un pentagone non croisé dont deux diagonales se coupent en leur milieu a deux côtés parallèles.
Un hexagone non croisé dont deux diagonales se coupent en leur milieu a deux côtés parallèles.

Exercice 8
Deux villes, A et B, sont distantes de 250 km.
Une automobile part de A à 8h et se dirige vers B à la vitesse constante de 80 km/h
Une motocyclette part de B à 8 h 30 min et se dirige vers A à la vitesse constante de 100 km/h.
A quelle heure les deux véhicule se croisent ils ?

Exercice 9
ABC est un triangle équilatéral. E est le milieu de [AB], F celui de [BC] et G celui de [AC].
Combien peut on tracer de cercles différents ayant pour centre un des points A BCDEFG, et passant par au moins un des six mêmes points ?

Exercice 10 (d'après crpe Lille 2000)
Trouver deux nombres entiers dont la somme est 2999 et dont la différence des carrés est 170943.

Exercice 11
ABCDEF est un hexagone régulier donné.
Construire à l'aide uniquement de la règle non graduée la parallèle à (BD) passant par F.



Corrigé de la feuille d'exercices n° 6

Exercice 1
Supposons que a, b et c soient impairs, alors a^2, b^2 et c^2 le sont également, ce qui est impossible car, en supposant que c désigne la mesure de l'hypoténuse, on a $a^2 + b^2 = c^2$ or la somme de deux nombres impairs est un nombre pair.
L'hypothèse de départ est donc fausse : a, b et c ne peuvent pas être tous les trois impairs, l'un des trois au moins est pair.

Si on multiplie par k les mesures des trois côtés d'un triangle, on obtient un agrandissement du triangle initial. Les angles sont conservés dans l'agrandissement, par conséquent si le triangle initial est rectangle, le triangle agrandi l'est également.

$(2t)^2 + (t^2 – 1)^2 = 4t^2 + t^4 –2t^2 + 1 = t^4 + 2t^2 + 1$
$(t^2 + 1)^2 = t^4 + 2t^2 + 1$
On constate donc que $(t^2 + 1)^2 = (2t)^2 + (t^2 – 1)^2$, ce qui permet d'affirmer que le triangle dont les côtés mesurent 2t, t^2 - 1 et t^2 + 1 est rectangle (et donc pythagoricien puisque les mesures des côtés sont des nombres entiers).

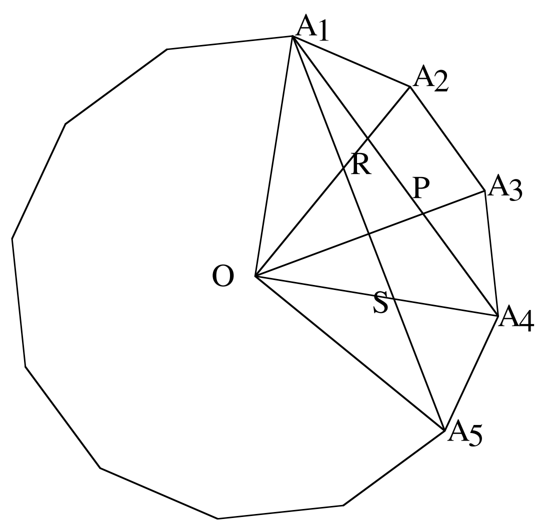
On a 26 = 2 x 13 donc, en prenant t = 13, on a 2t = 26 ; $t^2 - 1 = 168$ et $t^2 + 1 = 170$
Le triangle dont les côtés mesurent 26, 168, 170 est donc Pythagoricien.

On a également $26 = 5^2 + 1$ donc, en prenant t = 5, on a 2t = 10 ; $t^2 - 1 = 24$ et $t^2 + 1 = 26$
Le triangle dont les côtés mesurent 10, 24, 26 est donc Pythagoricien.

Pour 48, on peut procéder de la même façon (48 = 2 x 24 ; $48 = 7^2 – 1$).
On peut aussi chercher par la même méthode un triangle pythagoricien dont un côté est un diviseur de 48, puis agrandir le triangle obtenu pour en obtenir un dont un côté mesure 48.
Par exemple, $24 = 5^2 –1$, donc en prenant t = 5, on obtient le triangle pythagoricien 10, 24, 26 (le même que dans la question précédente) à partir duquel, en effctuant un agrandissement de coefficient 2, on trouve le triangle pythagoricien dont les côtés mesurent 20, 48 et 52.

En utilisant cette méthode, on peut trouver les triangles pythagoriciens suivants parmi lesquels vous pouviez choisir les cinq triangles demandés :
48, 575, 577   14, 48, 50   48, 286, 290   20, 48, 52   48, 189, 195   48, 140, 148   48, 90, 102
48, 64, 80   36, 48, 60
On n'a pas prouvé que cette liste contient **tous** les triangles pythagoriciens dont un côté mesure 48.

Exercice 2



Le dodécagone étant régulier, les angles au centre $\widehat{A_1OA_2}$ $\widehat{A_2OA_3}$ … $\widehat{A_{12}OA_1}$ mesurent chacun 360/12 = 30°.

Le triangle OA_3A_2 est isocèle en O, donc ses angles à la base sont égaux. De plus la somme de ses angles est 180°, on a donc $\widehat{OA_3A_2} = (180 – 30)/2 = 75°$.

Le triangle OA_1A_4 est isocèle en O et a un angle de 90°, l'angle mesure $\widehat{OA_4A_1}$ (égal à $\widehat{OA_4P}$) mesure donc 45°.

La somme des angles d'un triangle est 180°, dans le triangle OA_4P, on a donc $\widehat{OPA_4} = 180 – 30 – 45 = 105°$

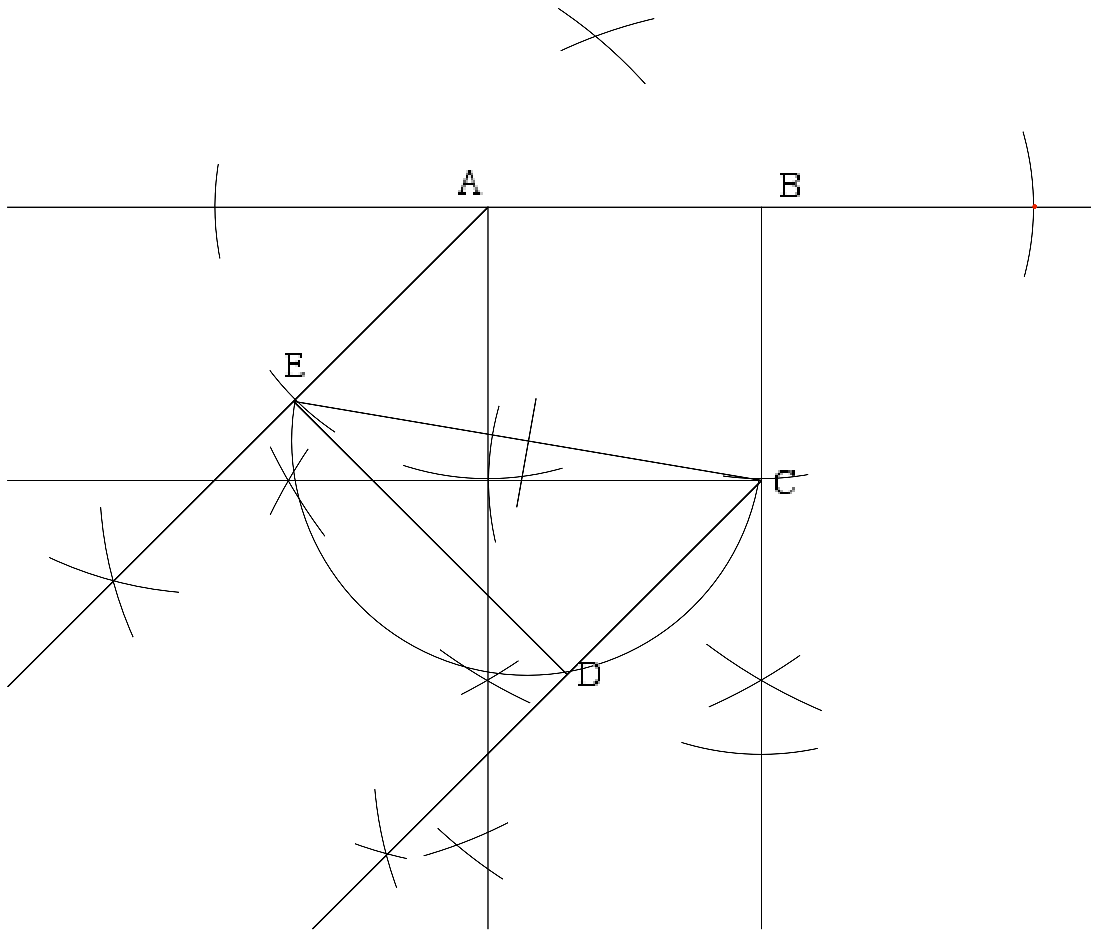
Les angles $\widehat{OPA_4}$ et $\widehat{OPA_1}$ sont supplémentaires, donc $\widehat{OPA_1}$ = 180 – 105 = 75°.

Les droites (A_1A_4) et (A_2A_3) forment avec la sécante commune (OA_3) des angles correspondants égaux, elles sont donc paralllèles.

Le triangle OA_1A_5 est isocèle en O, et son angle au sommet mesure 120°, donc l'angle $\widehat{OA_1A_5}$ mesure (180 – 120) / 2 = 30°.

Dans le triangle OA_1S, on a donc $\widehat{OSA_1}$ = 180 – 90 – 30 = 60°
On en déduit que le triangle ORS a deux angles de 60° (ceux de sommets O et S), il est donc équilatéral.

Exercice 3



La construction (un peu fastidieuse !) nécessite deux idées :
Comme 135 = 90 + 45, on peut construire les angles de 45° en construisant des perpendiculaires, puis la bissectrice d'un des angles de 90° obtenus.
Pour que l'angle $\widehat{EDC}$ mesure 90°, il faut et il suffit que D soit sur le cercle de diamètre [EC].

ABC est un triangle rectangle isocèle en B, les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BCA}$ mesurent donc 45°
On en déduit que les angles $\widehat{EAC}$ et $\widehat{DCA}$ mesurent chacun 135- 45 = 90°.
Le quadrilatère ACDE a trois angles droits, c'est donc un rectangle.

[AC], hypoténuse du triangle rectangle isocèle ABC, mesure $4\sqrt{2}$ cm.
ACDE étant un rectangle, DE = AC = $4\sqrt{2}$ cm, et CD = EA = 4cm.
On en déduit que le périmètre du pentagone ABCDE est 16 + $4\sqrt{2}$ cm.

Exercice 4

$\frac{47}{45} > 1$, $\frac{33}{34} < 1$ On en déduit que $\frac{33}{34} < \frac{47}{45}$

$\frac{24}{23} = 1 + \frac{1}{23}$ $\frac{38}{37} = 1 + \frac{1}{37}$ On en déduit que $\frac{24}{23} > \frac{38}{37}$

$\frac{900}{1050} = \frac{6\times150}{7\times150} = \frac{6}{7} = 1 - \frac{1}{7}$ $\frac{1600}{1800} = \frac{8\times200}{9\times200} = \frac{8}{9} = 1 - \frac{1}{9}$ On en déduit que $\frac{900}{1050} < \frac{1600}{1800}$

Exercice 5

A 30 km/h, le cycliste parcourt un km en 2 min, donc 12 km en 24 min.
A 20 km/h, le cycliste parcourt un km en 3 min, donc 12 km en 36 min.
Les 24 premiers km sont donc parcourus en 24 + 36 = 60 min, la vitesse moyenne est donc de 24 km/h.

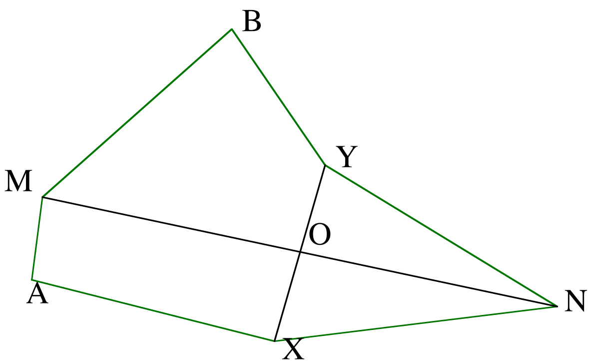
Si la vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet est 27 km/h, la durée totale est de 36 /27 = 4/3 h, soit une heure et 20 minutes.
La dernière partie du trajet s'effectue donc en 20 min, c'est à dire à une vitesse de 3 x 12 = 36 km/h.

Exercice 6

N s'écrit $\overline{abcd}$ en base 5, donc N = 125 a + 25b + 5c + d
N = 124 a + 24b + 4c + a + b + c + d
N = 4 (31a + 6b + c) + (a + b + c + d)
Si la somme a+b+c+d est un multiple de 4, alors N est la somme de deux multiples de 4, c'est donc un multiple de 4.

Exercice 7

Soit [MN] et [XY] les diagonales qui se coupent en leur milieu.
Le quadrilatère MXNY est alors un parallélogramme, on a donc [MX] // [NY] et [MY] // [NX]
Soit A le cinquième sommet du pentagone.
Si A est situé entre M et X, ou entre N et Y, alors les segments [MY] et [NX] sont des côtés du pentagone qui a donc deux côtés parallèles.
Si A est situé entre N et X, ou entre M et Y, alors les segments [NY] et [MX] sont des côtés du pentagone qui a donc deux côtés parallèles.
On constate que quelle que soit la position choisie pour le cinquième sommet, le pentagone a deux côtés parallèles, la première affirmation est donc vraie.



La deuxième affirmation est fausse : si on place par exemple le cinquième sommet entre M et X et le sixième entre M et Y, on obtient un hexagone qui n'a pas de côtés parallèles.

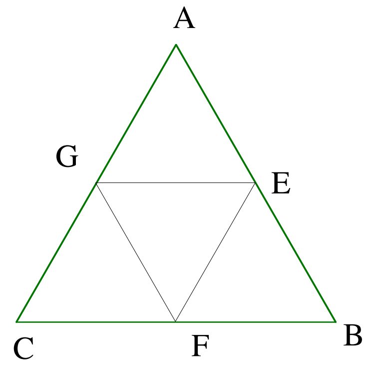
Exercice 8

A 8 h 30, l'automobile a parcouru 40 km, la distance entre les deux véhicules est alors de 210 km.
Cette distance diminue à la vitesse de 180 km/h, somme des vitesses des deux véhicules.
La distance diminue donc de 3 km en une minute, donc de 210 km en 70 min.
Le croisement a donc lieu 70 min après 8 h 30, c'est à dire à 9 h 40 min.

Exercice 9

Dans le triangle ABC, G est le milieu du côté [CA], E est le milieu du côté [AB], donc GE = BC/2. Il en est de même pour EF et FG.

La distance entre deux points nommés de la figure peut donc prendre trois valeurs seulement :
Les longueurs AB, BC et CA sont égales.
Les longueurs AE, EB, BF, FC, CG, GA, GE, FE, GF sont égales
Les longueurs AF, BG et CE sont égales (ce sont les trois hauteurs du triangle équilatéral).



Si on choisit comme centre un sommet de ABC, il y a donc trois mesures possibles pour le rayon, donc trois cercles possibles pour chaque centre.
Si on choisit comme centre un milieu de côté, il n'y a que deux rayons possible, donc deux cercles.

Le nombre total de cercles que l'on peut tracer en respectant les conditions est donc 3 x 3 + 3 x 2 = 15

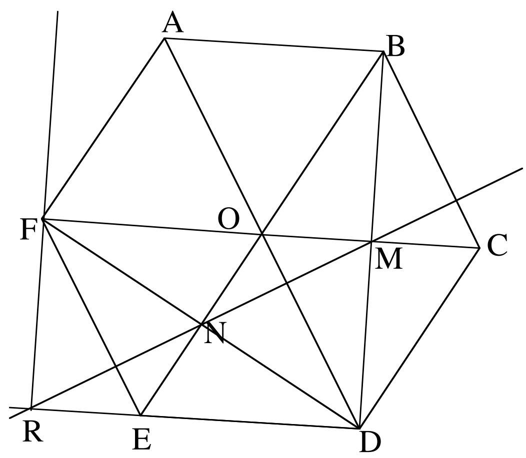
Exercice 10

Soient a et b les deux nombres cherchés.
<u>Première méthode, par essais.</u>
Supposons que a = 2000, alors b = 999, et $a^2 - b^2$ = 3 001 999 ce qui est beaucoup trop grand, il faut donc choisir a et b plus proches l'un de l'autre.
Supposons que a = 1600, alors b = 1399, et $a^2 - b^2$ = 602 799 ce qui est encore trop grand.
En poursuivant ainsi, on trouve les valeurs cherchées après quelques essais.

<u>Deuxième méthode, en utilisant les écritures algébriques.</u>
$170943 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
Comme a + b = 2999, on a 170943 = 2999(a – b) d'où a-b = 170943 : 2999 = 57
On en déduit que (a + b) + (a – b) = 2999 + 57 = 3056
Donc 2a = 3056, a = 1528 et b = 2999 – 1528 = 1471.
Les nombres cherchés sont 1528 et 1471.

Exercice 11

<u>Programme de construction :</u>
Tracer les diagonales [AD] et [BE], leur point d'intersection O est le centre de l'hexagone.
Tracer [BD] et [FD], on obtient les centres M et N des losanges BCDO et DEFO.
La droite (MN) coupe (DE) en R. (FR) est la droite cherchée.



<u>Justification :</u>
FODE est un losange de centre N, donc D est symétrique de F par rapport à N.

Etudions la droite symétrique de (FC) par rapport à N. Cette droite passe par D et est parallèle à (FC), c'est donc la droite (DE)

Le point M est sur (FC) son symétrique par rapport à N est donc sur (DE), il est également sur (MN) c'est donc le point R.

Dans la symétrie de centre N, F est le symétrique de D, R est le symétrique de M, donc les droites (FR) et (DM) sont symétriques, par conséquent elles sont parallèles.