Groupe seconde chance
Feuille d'exercice n° 7

Exercice 1

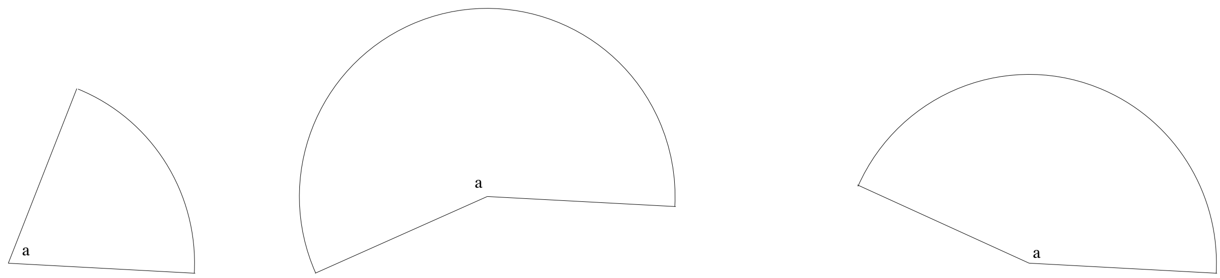
On considère Un segment [AC] de longueur 16 cm, et le point B situé sur [AC] à 6 cm de C.
P est un point du cercle de diamètre [AB] tel que AP = 8 cm.
La droite (AP) coupe le cercle de diamètre [AC] en M.
Calculer MC.
Calculer l'aire du quadrilatère BPMC.

Exercice 2

Soit N un nombre entier qui s'écrit avec 4 chiffres en base 4, et avec 6 chiffres en base 3 ?
Trouver toutes les valeurs possibles de N.

Exercice 3

On s'intéresse dans cet exercice à des patrons incomplets de cônes de révolution (il manque le disque qui est la base du cône). Il s'agit donc de secteurs angulaires qui ont tous en commun un rayon de 5 cm, et ne diffèrent que par la mesure a de l'angle (exprimée en degrés).
Voici trois exemples de tels secteurs angulaires (dessinés ici en réduction à l'échelle 1/2)



Calculer le rayon de la base du cône quand a = 90, quand a = 240, quand a = 216.
Pour cette dernière valeur, calculer également le volume du cône.

Exercice 4

On dispose de deux types de wagons.
Les wagons A ont une longueur de 13,5 m.
Les wagons B ont une longueur de 16,2 m.
Deux trains constitués exclusivement de wagons A pour l'un, B pour l'autre, ont la même longueur.
Quelle est la plus petite longueur possible de ces trains ?
Un train constitué de 16 wagons d'un mélange des deux types a une longueur de 243 m.
Combien de wagons de chaque type contient-il ?

Exercice 5

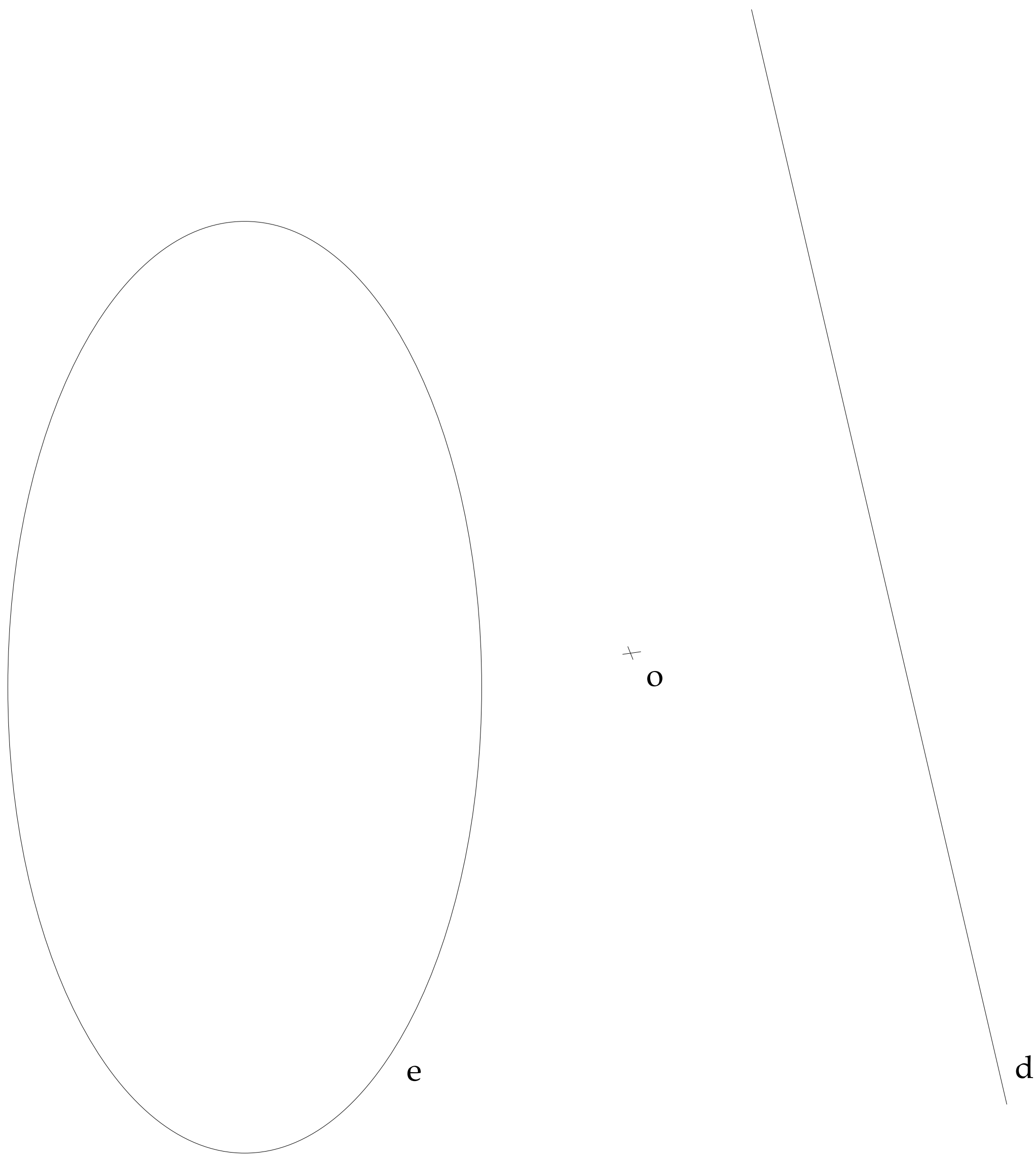
Deux marcheurs vont de la ville A à la ville B. L'un des deux emprunte le chemin direct qui mesure 14 km, l'autre suit un itinéraire de 21 km.
Chacun des marcheurs marche à une vitesse constante, la vitesse du plus rapide étant supérieure de 2 km/h à celle de l'autre.
Sachant que les deux marcheurs partent de A en même temps, et arrivent à B en même temps, calculer leurs vitesses respectives.

Exercice 6

Construire un triangle ABC tel que la médiane issue de A mesure 6 cm, la médiane issue de B mesure 9 cm, et AB = 8 cm.

Exercice 7

Sur la figure ci-dessous, construire un rectangle respectant simultanément les trois conditions suivantes :
Le centre du rectangle est le point O
Un des sommets est sur la droite d
Deux sommets sont sur l'ellipse e



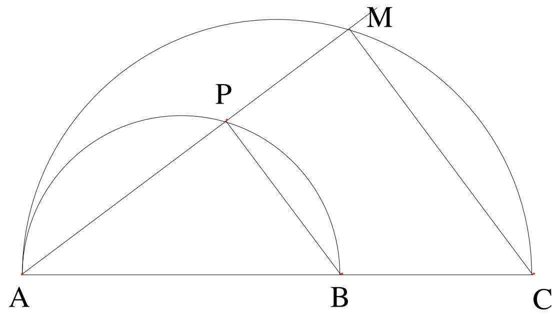
Exercice 8

Quels sont les nombres entiers (s'il y en a) qui ont pour reste 1 dans la division par 5 et pour reste 2 dans la division par 9 ?
Quels sont les nombres entiers (s'il y en a) qui ont pour reste 4 dans la division par 6 et pour reste 8 dans la division par 15 ?

Exercice 9

ABCD est un rectangle tel que AB = 8 cm et AD = 6 cm. E est le symétrique de A par rapport à B.
Les droites (AC) et (DE) se coupent en O.
Calculer l'aire du pentagone AEOCD.

Groupe seconde chance.
Corrigé des exercices de la feuille n° 7



Exercice 1

P est un point du cercle de diamètre [AB] donc le triangle ABP est rectangle en P, et on a :
$PB^2 = AB^2 - AP^2 = 100 - 64 = 36$, d'où BP = 6.

M est un point du cercle de diamètre [AC], donc le triangle AMC est rectangle en M.
Les droites (PB) et (MC) sont perpendiculaires à (AM), donc elles sont parallèles entre elles.
Dans le triangle AMC, le point P est sur (AM), B est sur (AC) et (PB) est parallèle à (MC), on a donc :
$\frac{AM}{AP}=\frac{AC}{AB}=\frac{MC}{PB}$ d'où on tire : $AM=\frac{AC}{AB}\times AP=12{,}8cm$ et $MC=\frac{AC}{AB}\times PB=9{,}6cm$

L'aire du quadrilatère BPMC peut être obtenue comme différence des aires des triangles ACM et ABP, où directement puisque BPMC est un trapèze rectangle dont on connaît les bases et la hauteur.

En utilisant la deuxième méthode, l'aire de BPMC est égale à PM x (PB + MC) / 2 c'est à dire
4,8 x (6 + 9,6) /2 = 2,4 x 15,6 = 37,44.
L'aire de BPMC mesure 37,44 cm^2.

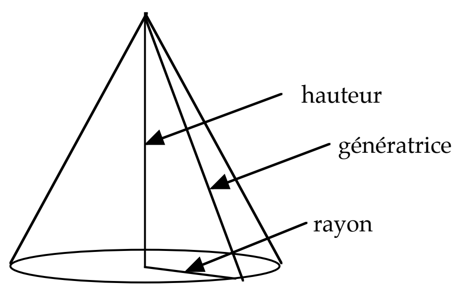
Exercice 2
N s'écrit avec quatre chiffres en base 4 donc $4^3 \leq N < 4^4$ soit $64 \leq N < 256$
N s'écrit avec six chiffres en base 3 donc $3^5 \leq N < 3^6$ soit $243 \leq N < 729$
En comparant les deux conditions on constate que les nombres N qui conviennent sont tous les entiers de 243 à 255 inclus.

Exercice 3
La solution de cet exercice repose principalement sur deux idées :
La longueur de l'arc de cercle du secteur angulaire est proportionnelle à la mesure de l'angle.
Le périmètre du disque de base du cône est égal à la longueur de l'arc de cercle du secteur.

Pour un secteur de 360°, c'est à dire un disque complet, la longueur de l'arc serait 10 π
Pour un secteur de 90° elle est donc de 2,5 π.
Pour un secteur de 240° elle est de 10 π x 240/360 = 20/3 π
Pour un secteur de 216° elle est de 10 π x 216/360 = 6 π

Dans chacun des cas, si on note r le rayon du disque de base et p son périmètre, on a r = p / (2π)
Le secteur de 90° permet donc de former un cône dont la base a un rayon de 1,25 cm
Le secteur de 240° permet de former un cône dont la base a un rayon de 10/3 cm
Le secteur de 216° permet de former un cône dont la base a un rayon de 3 cm.

Dans un cylindre de révolution, le pied de la hauteur est le centre du cercle de base.
La hauteur forme avec un rayon et une génératrice un triangle rectangle.
Sachant que la génératrice mesure 5 cm et le rayon 3 cm, on en déduit que la hauteur mesure 4cm.



Le volume du cylindre s'obtient alors par
$V = \pi r^2 h / 3 = \pi \times 3^2 \times 4 / 3 = 12 \pi\ cm^3$

Exercice 4
Les wagons A mesurent 135 dm, les wagons B mesurent 162 dm.
La mesure en dm des deux trains est donc un multiple commun à 135 et 162, et la plus petite valeur possible est le ppcm de 135 et 162.
$135 = 3^3 \times 5$ $\qquad 162 = 2 \times 3^4$
Le ppcm de 135 et 162 est donc $2 \times 3^4 \times 5$. La plus petite longueur possible est 810 dm, soit 81 m.

243 = 3 x 81. De plus, 81 m est la longueur de 6 wagons A, ou celle de 5 wagons B
On peut alors remarquer que si on met bout à bout deux trains de 5 wagons B et un de 6 wagons A, on obtient un train de 16 wagons dont la longueur est 243 m.
Il n'y a pas d'autre solution, car le nombre de wagons étant constant, si on remplace certains wagons A par des wagons B la longueur totale ou des wagons B par des A, la longueur est modifiée.

Il est bien entendu possible de répondre à cette question en posant un système de deux équations.

Exercice 5
Dans le même temps, le marcheur rapide parcourt une distance égale à une fois et demi celle du marcheur lent. Sa vitesse est donc égale à 1,5 fois celle du marcheur lent.
On en déduit que 2 km/h est la moitié de la vitesse du marcheur lent, qui va donc à 4 km/h tandis que le rapide marche à 6 km/h.

Si on ne voit pas cela, il est possible de passer par une mise en équation.
Phase de recherche au brouillon préparant la mise en équation :

Supposons que le marcheur le plus lent va à 5 km/h
La durée de son trajet en heures est égale à 14 / 5
La vitesse du marcheur rapide, en km/h est 5 + 2
La durée de son trajet en heures est 21 / (5 + 2)
Pour savoir si la vitesse choisie est la bonne, on se demande si les temps de parcours sont égaux :
14/5 est il égal à 21 / (5 + 2) ?

La solution rédigée est calquée sur cet essai au brouillon :

Soit v la vitesse en km/h du marcheur le plus lent.
La durée de son trajet est $\frac{14}{v}$
La durée du trajet de l'autre marcheur est $\frac{21}{v+2}$
Comme les deux trajets ont la même durée, on a $\frac{14}{v} = \frac{21}{v+2}$
On en déduit que 14 (v + 2) = 21 v, d'où 7 v = 28 et v = 4.
L'un des marcheurs se déplace à 4 km/h, l'autre à 6 km/h.

Exercice 6
Il est nécessaire de faire un croquis à main levée et de reporter dessus les données.
Soit G le centre de gravité du triangle ABC (point d'intersection des médianes), il est situé au deux tiers de chaque médiane en partant du sommet, on a donc AG = 4 cm, et BG = 6 cm.
Il est alors aisé de construire le triangle ABG, puis de placer les milieux de [AC] et de [BC], et enfin C.
A retenir : le rôle essentiel de la figure dessinée à main levée dans l'analyse du problème.

Exercice 7
Appelons ABCD le rectangle que l'on cherche à construire, A étant le point situé sur la droite d.
Les deux points situés sur l'ellipse ne peuvent pas être B et D, car O ne serait pas situé sur [BD], par conséquent C est un des deux points situés sur l'ellipse.
C est le symétrique de A par rapport à O, il est donc situé sur la droite symétrique de d par rapport à O.
Construisons cette droite, elle coupe l'ellipse en deux points C_1 et C_2.
Le cercle de centre O passant par C_1 coupe l'ellipse en un point B. Soit D le symétrique de B par rapport à O, il est facile de prouver que le quadrilatère ABC_1D répond au problème.
On trouve de la même façon une autre solution à partir du point C_2.

Exercice 8
Les premiers nombres qui ont pour reste 1 dans la division par 5 sont 1, 6, 11, 16, 21…
Les premiers nombres qui ont pour reste 2 dans la division par 9 sont 2, 11, 20, 29…
On constate que 11 est une des solutions du problème.
Soit n une autre solution :
n et 11 ont même reste dans la division par 5 donc n – 11 est multiple de 5
n et 11 ont même reste dans la division par 9 donc n – 11 est multiple de 9

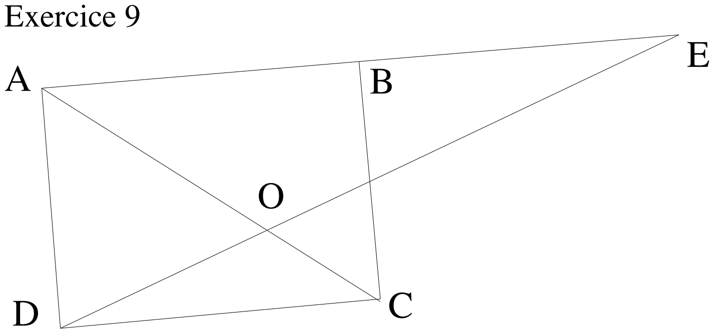
le nombre n – 11 doit donc être à la fois multiple de 5 et multiple de 9.
5 et 9 étant premiers entre eux, n-11 est donc multiple de 45. On a n – 11 = 45 k avec k entier.
Les solutions sont donc de la forme 11 + 45 k

Réciproquement, tout nombre de la forme 11 + 45k peut s'écrire 5 (9 k + 2)+1 ou 9 (5k +1) + 2, il a donc les restes souhaités.

Conclusion : les solutions sont tous les entiers de la forme 45k + 11

Soit p un nombre ayant pour reste 4 dans la division par 6 et 8 dans la division par 15
On a donc p = 6 m + 4, et p = 15 n + 8, avec m et n entiers.
On en déduit : p = 3 x 2n + 3 + 1 = 3(2n + 1) + 1
Et : p = 3 x 5n + 3 x 2 + 2 = 3(5n + 2) + 2
La première ligne indique que le reste dans la division de p par 3 est 1
La deuxième ligne indique que le reste de la division de p par 3 est 2
Il n'y a donc aucun nombre p qui satisfasse simultanément les deux conditions.

Exercice 9



C est sur (AO), D est sur (EO), et (DC) est parallèle à (AE), on peut donc appliquer le théorème de Thalès aux triangles AOE et COD, on a donc
$\frac{OA}{OC} = \frac{OE}{OD} = \frac{AE}{CD}$
Par ailleurs, comme E est le symétrique de A par rapport à B, on a AE = 2 AB, et comme ABCD est un rectangle AB = CD, d'où AE = 2 CD.
On en déduit que les trois rapports écrits plus hauts sont égaux à 2, donc OA = 2 OC et AC = 3 OC

Les triangles DOC et DAC ont la même hauteur issue de D, leur aire est donc proportionnelle à la longueur du côté opposé à D
On a donc aire(DOC) = aire (DAC)/ 3 = 24 / 3 = 8

L'aire du pentagone AEOCD est la somme des aires de ADE et de DOC.
L'aire de AEOCD est donc égale à 48 + 8 = 56 cm^2.