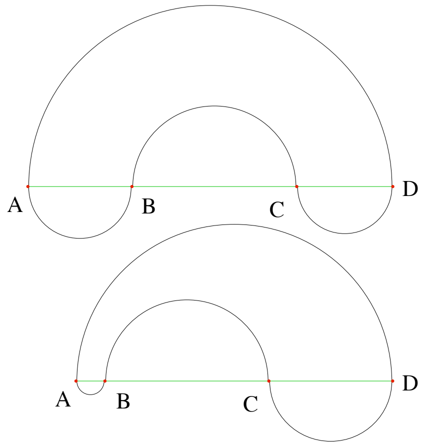
Groupe seconde chance
Feuille d'exercice n° 8

Exercice 1
On considère trois points A B et C non alignés.
Construire au compas seul (donc sans règle) le point D, symétrique de A par rapport à (BC) et le point E, symétrique de A par rapport à (BD). Justifier la construction effectuée.

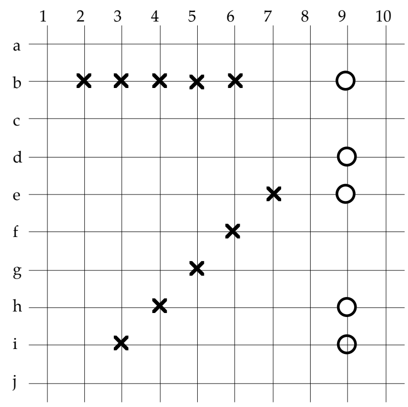
Exercice 2
On admettra pour cet exercice que les nombres entiers qui ont exactement 9 diviseurs sont ceux qui se décomposent en facteurs premiers de l'une des deux façons suivantes : $a^2 \times b^2$ (avec $a \neq b$) ou c^8
Par exemple, les nombres $7^2 \times 11^2$ et 5^8 ont chacun 9 diviseurs.
Trouver tous les nombres entiers inférieurs à 300 qui ont exactement 9 diviseurs.

Exercice 3
On considère toutes les figures formées de quatre demi-cercles disposés comme l'indiquent les figures ci-contre.
B et C sont des points quelconques du segment [AD].
On s'intéresse à la figure fermée formée par les demi-cercles.
Son périmètre est-il égal à celui du cercle de diamètre [AD] ? Justifier.
Son aire est-elle égale à celle du demi-disque de diamètre [AD] ? Justifier.

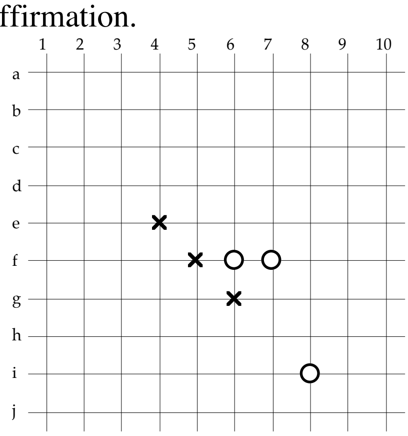


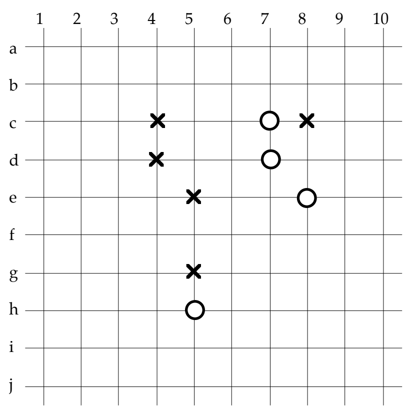
Exercice 4
Trouver tous les entiers inférieurs à 100 dont le carré se termine par 36.

Exercice 5
Règle du jeu de morpion :
Le jeu se joue à deux, sur une grille de 10 lignes horizontales et 10 lignes verticales.
Chaque joueur à tour de rôle place son signe (un cercle pour l'un, une croix pour l'autre) sur l'une des intersections de la grille.
Dès que l'un des joueurs réussi à aligner cinq signes <u>consécutifs</u> sur l'une des lignes, ou sur l'une des diagonales des carrés de la grille, il a gagné.
Le schéma ci-contre montre deux positions qui seraient gagnantes pour le joueur ayant les croix, et une position qui n'est pas gagnantes pour le joueur ayant les cercles (les cercles sont alignés, mais pas consécutifs).



Cécile et Xavier jouent au morpion, Cécile joue avec les cercles, et Xavier avec les croix.
Sur le schama de gauche, c'est à Xavier de jouer, où doit-il jouer pour être sûr de gagner ? Justifiez.
Sur le schéma de droite, c'est à Cécile de jouer, elle prétend être certaine de gagner en trois coups.
Discutez son affirmation.

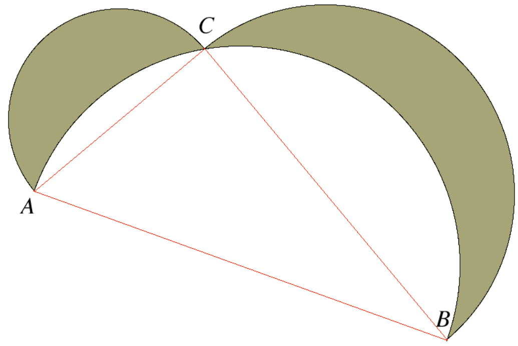




Y Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes

Exercice 6

ABC est un triangle rectangle en C.
On trace les demi-cercles de diamètres [AB], [BC] et [AC] comme l'indique la figure.
Démontrer que l'aire de la surface grisée est égale à l'aire du triangle ABC.



Exercice 7

On considère une droite d, et deux points A et A' symétriques par rapport à d.
B est un point qui n'appartient ni à d ni à (AA'), ni aux parallèles à d passant par A ou A'.
Construire en utilisant exclusivement la règle non graduée le symétrique de B par rapport à d.

Exercice 8

Un rectangle est tracé sur une feuille de papier quadrillé.
L'unité de longueur étant le côté d'un petit carreau, on note L la longueur du rectangle, l sa largeur.
On veut colorier un certain nombre de carreaux du rectangle, de façon à ce que sur chaque ligne et sur chaque colonne il y ait au moins un carreau colorié.
Exprimer en fonction de L et l le nombre minimum de carreaux que l'on doit colorier pour y parvenir.

Exercice 9

Dans un sac de billes, les billes sont toutes d'une des trois couleurs suivantes : rouge, bleu, vert.
Un tiers des billes sont rouges, deux cinquième des billes sont vertes, et il y a 9 billes rouges de plus que de billes bleues. Quel est le nombre total de billes dans le sac ?

Exercice 10

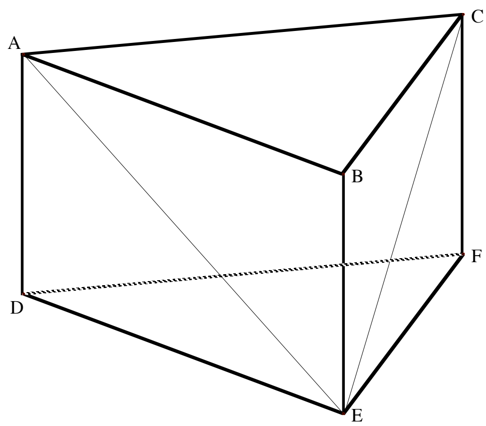
Deux commerçants constatent qu'ils vendent le même article avec une différence de prix de 120€.
Sans ce concerter (car cela serait illégal), l'un des commerçants augmente son prix de 10% tandis que l'autre baisse le sien de 5%. L'article en question se retrouve alors vendu au même prix dans les deux boutiques. Calculer ce nouveau prix.

Exercice 11

Un nombre entier n s'écrit avec trois chiffres en base 10, et également avec trois chiffres en base 5.
En base 10, son chiffre des unités est 7.
La somme des trois chiffres de l'écriture en base 10 de n et la somme des trois chiffres de l'écriture en base 5 de n sont égales.
Déterminer toutes les valeurs possibles de n.

Exercice 12

ABCDEF est un prisme droit. Sa base ABC est un triangle rectangle en B.
On a AB = 8 cm, BC = 6 cm, et BE = 4 cm.
On coupe ce prisme en deux parties selon le plan AEC.
Calculer le volume de la pyramide ADFCE.



Groupe seconde chance
Correction des exercices de la feuille n° 8

Exercice 1
Programme de la construction :
Tracer les cercles de centre B et C qui passent par A.
L'autre point commun de des deux cercles est le point D cherché.
Justification :
A et D sont sur un même cercle de centre B, donc BA=BD, donc B est sur la médiatrice de [AD].
A et D sont sur un même cercle de centre C, donc CA=CD, donc C est sur la médiatrice de [AD].
B et C sont sur la médiatrice de [AD] donc (BC) est la médiatrice de [AD] ce qui revient à dire que A et D sont symétriques par rapport à (BC).

La construction du point E se fait exactement de la même façon, en remplaçant le point C par D.

Exercice 2
Il existe un seul entier positif de la forme c^8 qui soit inférieur à 300, c'est $2^8 = 256$

Si le nombre est de la forme $a^2 \times b^2$, essayons les différentes valeurs possibles (en supposant que a<b)

Valeur de a	Valeur de b	Valeur de $a^2 \times b^2$
2	3	36
2	5	100
2	7	196
2	11	Trop grand
3	5	225
3	7	Trop grand

Les nombres inférieurs à 300 ayant exactement 9 diviseurs sont donc 36, 100, 196, 225 et 256.

Exercice 3
L'aire n'est en général pas égale à celle du demi-disque de diamètre [AD]
Si par exemple B est proche de A et C proche de D, l'aire de la figure est nettement inférieure à celle du demi-disque. Si B et C sont proches l'un de l'autre, l'aire de la figure est supérieure à celle du demi-disque.

Le périmètre de la figure est égal à $\pi AB + \pi BC + \pi CD + \pi AD = \pi (AB + BC + CD) + \pi AD = 2\pi AD$
Il est donc égal au périmètre du cercle de diamètre [AD].

Exercice 4
Il est clair que dans les nombres inférieurs à 10, seul 6 convient.
notons n un nombre supérieur à 10, a son chiffre des dizaines et b son chiffre des unités.
Le chiffre des unités du carré est 6, donc b vaut 4 ou 6. Etudions séparément les deux cas.

- Si b = 4, on a : $n^2 = (10 a + 4)^2 = 100 a^2 + 80a + 16 = 100 a^2 + 10 (8a + 1) + 6$

Le nombre n^2 se termine donc par 36 si et seulement si 8a + 1 se termine par 3, c'est à dire si 8a se termine par 2. Ceci est réalisé pour a = 4, et pour a = 9.

- Si b = 6, on a : $n^2 = (10 a + 6)^2 = 100 a^2 + 120a + 36 = 100 a^2 + 10 (12a + 3) + 6$

Le nombre n^2 se termine donc par 36 si et seulement si 12a + 3 se termine par 3, c'est à dire si 12a se termine par 0. Ceci est réalisé pour a = 0, et pour a = 5, mais la valeur 0 est exclue puisque le nombre est supposé supérieur à 10.
Conclusion : les nombres inférieurs à 100 dont le carré se termine par 36 sont 6, 44, 56 et 94.

Exercice 5
Xavier doit jouer en d3. Le coup suivant, quoi que joue Cécile il pourra gagner en jouant en c2 si Cécile n'y a pas joué, en h7 dans le cas contraire.
Cécile peut l'emporter en trois coups en jouant en f7
Au coup suivant, elle jouera g6, sauf si Xavier a joué g6 d9 ou i4, auquels cas elle joue e7
Dans les deux cas, elle obtient une configuration de quatre points alignés consécutifs, avec une plac libre à chaque extremité, et elle peut donc terminer le coup suivant.
On remarque que sur la configuration de départ, Xavier n'a aucun alignement de trois points. Il lui est donc impossible d'obtenir 5points alignés en seulement deux coups avant que Cécile termine.

Ce raisonnement peut avantageusement être présenté par un diagramme en arbre :

Cécile	Xavier	Cécile	Xavier	Cécile
			B7	G7
	D9, G6 ou I4	E7	Autre chose	B7
F7			I4	D9
	Autre chose	G6	Autre chose	I4

Exercice 6
Notons a = BC/2, b = AC/2, c = AB/2 (les nombres a b et c sont donc les mesures des rayons)
La surface grisée est obtenue en ajoutant au triangle les deux petits demi-disques, puis en soustrayant le grand demi-disque.
Or l'aire du grand demi-disque est $\frac{1}{2}\pi c^2$ celle des deux petits est $\frac{1}{2}\pi a^2 + \frac{1}{2}\pi b^2 = \frac{1}{2}\pi(a^2 + b^2)$
Le triangle ABC étant rectangle en C, on a $4c^2 = 4a^2 + 4b^2$ d'où on tire $c^2 = a^2 + b^2$, par conséquent l'aire du grand demi-disque est égale à la somme des aires des deux petits.
Par conséquent, l'aire grisée est égale à celle du triangle ABC.

Exercice 7
Traçons la droite (BA). Elle coupe la droite d en un point M
Les points A, B, M sont alignés, par conséquent leurs symétriques par rapport à d qui sont respectivement A', B' et M sont également alignés (la symétrie axiale conserve l'alignement).
Le point B' est donc situé sur la droite (A'M)

Traçons la droite (BA'). Elle coupe la droite d en un point N
Les points A', B, N sont alignés, par conséquent leurs symétriques par rapport à d qui sont respectivement A, B' et N sont également alignés. Le point B' est donc situé sur la droite (AN)

B' est donc obtenu à l'intersection des droites (A'M) et (AN).

Exercice 8
Plaçons le rectangle de telle sorte qu'il y ait L colonnes et l lignes.
Il est clair que le nombre de cases à colorier est supérieur ou égal à L (sinon il ne peut pas y avoir une case de couleur dans chaque colonne).
La méthode illustrée ci dessous montre qu'avec L cases coloriées on peut respecter la contrainte « au moins une case dans chaque ligne et dans chaque colonne).

x									
	x								
		x							
			x						
				x	x	x	x	x	x

Il est possible de respecter la consigne en coloriant L cases, c'est impossible avec moins de L cases, par conséquent le nombre minimum cherché est égal à L.

Exercice 9
5/15 des billes sont rouges, et 6/15 sont vertes, par conséquent 4/15 sont bleues
Les neuf billes rouges supplémentaires par rapport aux bleues représentent donc 1/15 du total, il y a donc en tout 9 x 15 = 135 billes.

Exercice 10
Soit p le prix le moins cher dans la situation initiale.
On a 1,10 p = 0,95 (p + 120), on en tire 1,10 p = 0,95 p + 114, d'ou 0,15p = 114 et p = 760.
Le prix initial le moins cher étant de 760 €, le prix commun est de 760 x 1,10 = 836 €.

Exercice 11
Le plus petit nombre entier qui s'écrit avec trois chiffres en base 5 est 25 qui s'écrit $\overline{100}$
Le plus grand nombre entier qui s'écrit avec trois chiffres en base 5 est 124 qui s'écrit $\overline{444}$

Les nombres entiers s'écrivant avec trois chiffres à la fois en base 5 et en base 10 sont donc les nombres de 100 à 124.
Parmi eux, seuls 107 et 117 ont pour chiffre des unités 7 en base 10.
107 s'écrit $\overline{412}$ en base 5 ; 117 s'écrit $\overline{422}$ en base 5.
On constate que seul le nombre 117 satisfait à tous les critères du problème.

Exercice 12
La pyramide ADFCE peut être obtenue en enlevant la pyramide ABCE du prisme droit ABCDEF.
Le volume du prisme est $\left(\frac{6\times8}{2}\times4\right):3$ = 96 cm^3. Celui de la pyramide ABCE est $\left(\frac{6\times8}{2}\times4\right):3$ = 32 cm^3.
Par conséquent le volume de la pyramide ADFCE est de 96 – 32 = 64 cm^3.

Il était également possible de calculer l'aire de la base de ADFCE, qui est le rectangle ACFD.
Cette aire mesure 40 cm^2.
Il faut ensuite déterminer la mesure de la hauteur de la pyramide, qui est aussi la hauteur issue de E du triangle DFE. Si on appelle h cette hauteur l'aire du triangle DEF peut se calculer de deux façons différentes, ce qui donne DF x 10 / 2 = 6 x 8 / 2 d'où DF = 4,8
Le volume est alors égal à 40 x 4,8 / 3 = 64 cm^3.