Groupe seconde chance
Feuille d'exercice n° 9

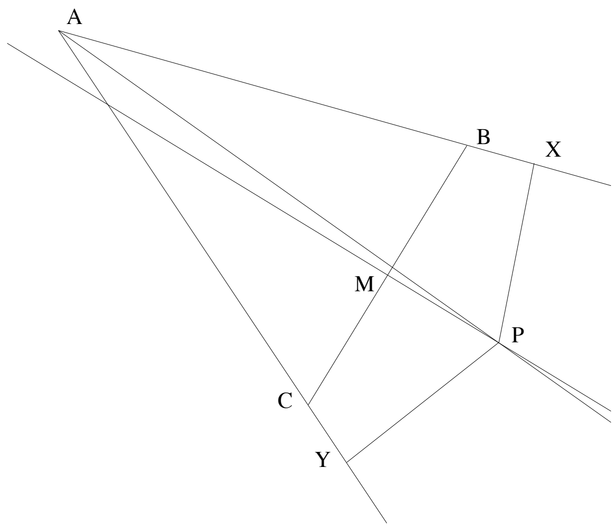
Exercice 1
AMN et BMN sont deux triangles isocèles, respectivement en A et en B.
R est un point de (AN) distinct de A et N.
Soit S l'intersection de (AB) et (MN).
On appelle T le symétrique de R par rapport à S.
Démontrer que les droites (AN) et (MT) sont parallèles.

Exercice 2
ABCD est un parallélogramme.
M est le milieu de [AB].
Les droites (BD) et (MC) se coupent en I.
La droite (AI) coupe (BC) en J.
Démontrer que J est le milieu de [BC].

Exercice 3
Soit un trapèze ABCD tel que (AB) // (CD)
On appelle R, S, T et V les milieux respectifs de [AD], [BD], [AC] et [BC].
Démontrer que les points R S T et V sont alignés.

Exercice 4
Soit un cercle de centre O et de diamètre [AB], tel que AB = 10 cm.
Soit C un point de ce cercle tel que BC = 6 cm.
On appelle M le milieu de [OB], N le milieu de [OC].
Les droites (AC) et (MN) se coupent en T.
Calculer la longueur CT.

Exercice 5 (*issu du site « mathématiques magiques » http://perso.wanadoo.fr/therese.eveilleau*)
Le texte ci-dessous démontre qu'un triangle quelconque ABC est isocèle en A.
Comme on pourrait prouver de la même façon que ce triangle quelconque est isocèle en B ou en C, il en résulte que tout triangle est équilatéral.
Bien entendu la démonstration est fausse, encore faut-il trouver précisément ce qui la rend fausse… c'est précisément le travail qui vous est demandé.



Soit P le point d'intersection de la médiatrice de [BC] et de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.
La perpendiculaire à (AB) passant par P coupe (AB) en X
La perpendiculaire à (AC) passant par P coupe (AC) en Y

- P est sur la médiatrice de [BC] donc PB = PC
- P est sur la bissectice de l'angle $\widehat{BAC}$, donc il est à égale distance des deux côtés de l'angle, et PX = PY.
- Les triangles rectangles PXB et PYC ont un côté de l'angle droit égal (PX = PY), et leurs hypoténuses égales (PB = PC), par conséquent ils sont superposables. On a donc BX = CY.
- Les triangles rectangles PXA et PYA ont un côté de l'angle droit égal, et la même hypoténuse AP, par conséquent ils sont superposables. On a donc AX = AY.
- AX = AY et BX = CY, par conséquent AX – BX = AY – CY, c'est à dire que AB = AC.
- AB = AC, donc le triangle ABC est isocèle en A.

Exercice 6

ABCD est un losange dont les diagonales [AC] et [BD] mesurent respectivement 50 mm et 120 mm.
On appelle O le centre du losange. La parallèle à (BC) passant par O coupe (CD) en R.
Calculer l'aire et le périmètre du quadrilatère ADRO.

Exercice 7

On cherche à tracer tous les parallélogrammes respectant les conditions suivantes :
Tous les côtés et l'une au moins des diagonales mesurent un nombre entier de centimètres.
La somme des mesures des 4 côtés et de la diagonale entière est de 19 cm.
Tracer toutes les figures possibles en précisant éventuellement leur nature.

Exercice 8

On s'intéresse à un quadrilatère ABCD dont les diagonales sont perpendiculaires.
Soient O l'intersection des diagonales, P, R, S et T les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD] et [DA].
Comparer la somme OP + OR + OS + OT au périmètre de ABCD.

Exercice 9

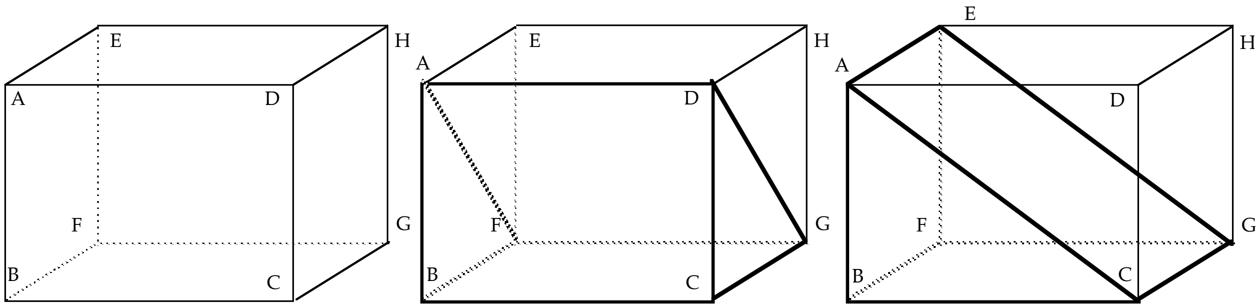
On considère un cercle de centre O et des points A, B et C de ce cercle, choisis de telle sorte que ABC ne soit pas rectangle. On appelle M le milieu de [AB]. La perpendiculaire à (AC) passant par B et la perpendiculaire à (BC) passant par A se coupent en un point P.
Démontrer que les droites (OM) et (PC) sont parallèles.

Exercice 10

ABCD est un quadrilatère convexe dont les diagonales se coupent en O.
On a OA = 2 cm, OB = 4 cm, OC = 6 cm, et OD = 8 cm.
Démontrer que l'aire de ABCD mesure 12 fois l'aire de AOB.
Construire à la règle graduée et au compas un quadrilatère ABCD répondant aux conditions ci-dessus et dont l'aire mesure 36 cm^2.

Exercice 11

ABCDEFGH est un pavé droits. On a AB = 12 cm, BC = 16 cm, BF = 9 cm.
On étudie deux façons de découper ce pavé en deux prismes droits.
Comparer les prismes obtenus, ABFDCG et ABCEFG du point de vue de leurs volumes et de l'aire totale de leurs faces.



Exercice 12

ABC est un triangle tel que AB = 4 cm, BC = 3 cm, AC = 2 cm.
D est le point de [BC] tel que BD = 9 cm. E est le point de [AC] tel que AE = 6 cm.
Les droites (AD) et (BE) se coupent en F, démontrer que A est le milieu de [DF].
La droite (FC) coupe (ED) en un point P, démontrer que FC = 2 CP.

Groupe seconde chance
Corrigés des exercices de la feuille n° 9

Exercice 1
AMN est isocèle en A, donc A est sur la médiatrice de [MN].
BMN est isocèle en B, donc B est sur la médiatrice de [MN].
A et B sont sur la médiatrice de [MN] par conséquent (AB) est la médiatrice de [MN] et son intersection S avec [MN] est donc le milieu de [MN].
T est le symétrique de R par rapport à S donc S est le milieu de [RT]
Les diagonales [MN] et [RT] du quadrilatère MRNT ont le même milieu S donc MRNT est un parallélogramme.
MRNT est un parallélogramme donc (MT) // (RN), or (AN) et (RN) sont confondues donc (MT)//(AN).

Exercice 2
Appelons O le centre du parallélogramme ABCD
Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu, donc O est le milieu de [AC]
O est le milieu de [AC] et M celui de [AB] donc [MC] et [BO] sont des médianes du triangle ABC et leur intersection I en est le centre de gravité.
Dans le triangle ABC, la droite (AI) passe par le sommet A et par le centre de gravité, c'est donc la médiane issue de A. Son intersection J avec le côté [BC] est donc le milieu de [BC].

Exercice 3
Dans le triangle ABD, R est le milieu de [AD] et S celui de [BD] donc (RS) // (AB).
On démontre de même dans le triangle ABC que (TV)//(AB), et dans le triangle ADC que (RT) // (DC).
On a (RT) // (DC) et (DC) // (AB) donc (RT) // (AB)
Il n'existe qu'une seule droite parallèle à (AB) et passant par R, donc (RS) et (RT) sont confondues.
Il n'existe qu'une seule droite parallèle à (AB) et passant par T, donc (TV) et (RT) sont confondues.
Les droites (RS) (RT) et (TV) sont confondues, donc R, S, T et V sont alignés.

Exercice 4
Le point C est sur le cercle de diamètre [AB], donc le triangle ABC est rectangle en C.
ABC est rectangle en C, AB = 10 et BC = 6, d'après le théorème de Pythagore on a donc
$AC^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$, d'où AC = 8.
Dans le triangle BOC, M est le milieu de [OB] et N celui de [OC], donc (MN) // (BC).
Dans le triangle ABC, M et sur [AB], T est sur [AC] et (MT) // (BC), on a donc, d'après le théorème de Thalès : $\frac{AT}{AC} = \frac{AM}{AB}$.
On en déduit que AT = 3/4 AC, donc TC = 1/4 AC = 2 cm.

Exercice 5
Vous devriez voir clairement la supercherie en faisant vous même une figure précise.
On s'aperçoit alors que si l'on dessine un triangle ABC non isocèle en A, l'un des deux points X et Y est situé sur un côté du triangle tandis que l'autre est à l'extérieur.
Par conséquent on est dans un des deux cas suivants :

AB = AX – BX et alors AC = AY + CY

Ou bien AB = AX + BX et alors AC = AY – CY

Les égalités AX = AY et BX = CY, qui sont parfaitement correctes, ne permettent donc pas de conclure que AB = AC.

Exercice 6
Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu.
Le triangle AOD est alors rectangle en O, et on a OA = 25 mm et OD = 60 mm.
Le théorème de Pythagore permet alors d'affirmer que $AD^2 = 25^2 + 60^2 = 4225$, d'où AD = 65 mm.

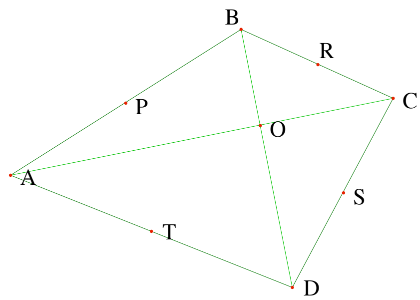
Dans le triangle CAD, O est le milieude [AC] et (OR) est parallèle à (AD), donc (OR) coupe le côté [CD] en son milieu qui est donc le point R.
Dans le triangle CAD, O et R sont les milieux respectifs de [AC] et [CD], donc OR = AD/2 = 32,5 mm.
Les côtés du losange sont égaux, et R est le milieu de [CD] on a donc également CR = 32,5 mm
Le périmètre de ADRO est alors égal à 25 + 65 + 32,5 + 32,5, soit 155 mm.

L'aire du triangle AOD (ainsi que celle de COD) est égale à 25 x 60 / 2 = 750 mm^2.
Les triangles COR et ROD ont la même hauteur issue de O et des bases CR et RD égales, ils ont donc la même aire. L'aire de ROD est donc la moitié de celle de COD, c'est à dire 375 mm^2.
L'aire de ADRO est la somme des aires des triangles AOD et ROD, elle mesure donc 1125 mm^2.

Exercice 7
Appelons a et b les mesures des côtés du parallélogramme, d la mesure de la diagonale entière
On a 2a + 2b + d = 19 donc d = 19 – 2 (a + b), ce qui impose à d d'être impair.
Si on coupe le parallélogramme selon la diagonale de mesure d, on obtient deux triangles dont les mesures des côtés sont a, b et d.
Etudions les valeurs possibles de d et voyons dans chaque cas si les valeurs de a b et d permettent la construction d'un triangle. Rappel : on peut construire un triangle si et seulement si le plus grand des trois côtés est inférieur à la somme des deux autres.
Si d = 1, a + b = 9 aucune des valeurs possibles pour a et b ne permet de construire un triangle.
Si d = 3, a + b = 8 il est alors possible de construire un triangle dans les cas suivants :
a = 3, b = 5 a = b = 4 (et a = 5, b = 3 mais on obtient le même triangle que dans le premier cas).
Si d = 5, a + d = 7 il est alors possible de construire un triangle dans les cas suivants :
a = 2, b = 5 a = 3, b = 4 (et a = 4, b = 3 ainsi que a = 5, b = 2).
Si d= 7, a + d = 6 ce qui ne permet pas de construire un triangle. Il en est de même pour les valeurs de d supérieures à 7.

Il est donc possible de construire 4 parallélogramme différents, à partir des 4 triangles trouvés.
Parallélogramme 1 : côtés de 3 et 5 cm, diagonale de 3 cm.
Parallélogramme 2 : côtés de mesurant tous 4 cm, diagonale de 3 cm, c'est un losange.
Parallélogramme 3 : côtés de 2 et 5 cm, diagonale de 5 cm.
Parallélogramme 4 : côtés de 3 et 4 cm, diagonale de 5 cm. Il s'agit alors d'un rectangle. En effet, la réciproque du théorème de Pythagore permet d'affirmer que les côtés de mesures 3 cm et 4 cm forment un angle droit, or tout parallélogramme ayant un angle droit est un rectangle.

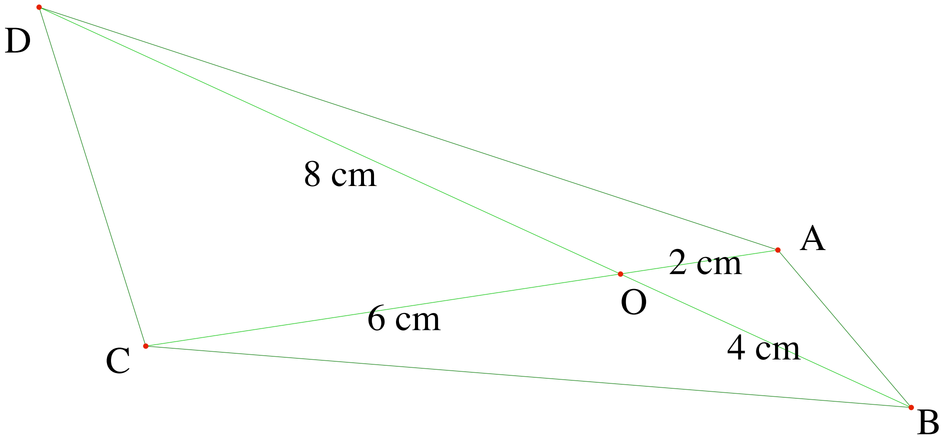
Exercice 8



Dans un triangle rectangle, le milieu de l'hypothénuse est le centre du cercle circonscrit.
En prenant l'exemple du triangle rectangle ABO, AB (mesure du diamètre du cercle circonscrit) est donc égal à 2 PO (mesure du rayon du même cercle).
On a de même BC = 2 RO, CD = 2 SO et AD = 2 TO,
donc AB + BC + CD + DA = 2 (PO + RO + SO + TO)
Le périmètre du quadrilatère est double de la somme PO + RO + SO + TO.

Exercice 9
A et B sont sur le cercle de centre O, donc AOB est isocèle en O.
La médiane (OM) est donc aussi hauteur, elle est donc perpendiculaire à (AB)
Dans le triangle ABC la droite (AP), qui passe par le sommet A et est perpendiculaire au côté [BC] est une hauteur. Il en est de même pour la droite (BP).
Le point P, intersection de deux hauteurs du triangle ABC, est son orthocentre. La droite (PC), qui passe par le sommet C et l'orthocentre est donc la hauteur relative à [AB]. Elle est donc perpendiculaire à (AB).
Les droites (OM) et (PC) sont perpendiculaires à (AB), elles sont donc parallèles entre elles.

Exercice 10



Quand deux triangles ont la même hauteur, leurs aires sont proportionnelles à la mesure de la base.
Les triangles AOB et AOD ont même hauteur issue de A, et les bases correspondantes mesurent respectivement 4 et 8 donc Aire(AOD) = 2 Aire (AOB).
Les triangles AOD et COD ont même hauteur issue de D, et les bases correspondantes mesurent respectivement 2 et 6 donc Aire(COD) = 3 Aire (AOD) = 6 Aire (AOB).
Les triangles AOB et COB ont même hauteur issue de B, et les bases correspondantes mesurent respectivement 2 et 6 donc Aire(COB) = 3 Aire (AOB)
L'aire du quadrilatère qui est égale à la somme des aires de AOB, BOC, COD et DOA est donc égale à Aire (AOB) + 3 Aire (AOB) + 6 Aire (AOB) + 2 Aire (AOB) = 12 Aire (AOB).

Pour que l'aire du quadrilatère soit 36 cm^2, il faut et il suffit donc que l'aire de AOB soit 3 cm^2.

Pour construire le triangle AOB, on peut alors procéder ainsi ;
Tracer un segment [BH] de 3 cm de long.
Tracer la droite d, perpendiculaire à (BH) et passant par H.
Placer O sur d (au compas) à 4 cm de B. (Les deux positions de B conduisent à des figures isométriques).
Placer A sur d à 2 cm de O. (Il y a deux positions possibles pour A, conduisant à des triangles différents).
La construction de C et D ne pose ensuite aucun problème.

Exercice 11
Les deux prismes ont le même volume, qui est la moitié du volume du pavé.
Les faces ABF et DCG ont une aire totale égale à celle de ABFE. L'aire totale du premier prisme est donc égale à la somme des aires de trois faces différentes du pavé plus l'aire de ADGF.
De la même façon, l'aire du second prisme est égale à la somme des aires de trois faces différentes du pavé plus l'aire de ACGE.
Il suffit donc de comparer les aires des rectangles ADGF et ACGE
Le théorème de Pythagore permet de déterminer que DG = 15 et AC = 20.
On en déduit que l'aire de ADGF est 15 x 16 = 240 cm^2, celle de AEGC est 20 x 9 = 180 cm^2.
L'aire totale des faces de ABFDCG est donc supérieure à l'aire des faces de ABCEFG.

Exercice 12
CE / CA = 4 / 2 = 2 ; CD / CB = 6 / 3 = 2.
Les points ACE sont alignés, BCD sont alignés dans le même ordre et CE / CA = CD / CB, les droites (AB) et (ED) sont donc parallèles (réciproque du théorème de Thalès).
E est sur (CA), D est sur (CB) et (AB)//(ED), donc ED / BA = CE / CA = 2 (théorème de Thalès appliqué aux triangles ABC et ECD)
E est sur (FB), D est sur (FA) et (ED // (BA) donc EF / EB = DF /DA = ED / BA = 2 (théorème de Thalès appliqué aux triangles ABC et ECD). On en déduit que A et B sont les milieux respectifs de [FD] et [FE]
A et B sont les milieux de [FD] et [FE] par conséquent [EA] et [BD] sont des médianes de EDF.
C est donc le centre de gravité de EDF, ce qui implique que FC = 2 CP.