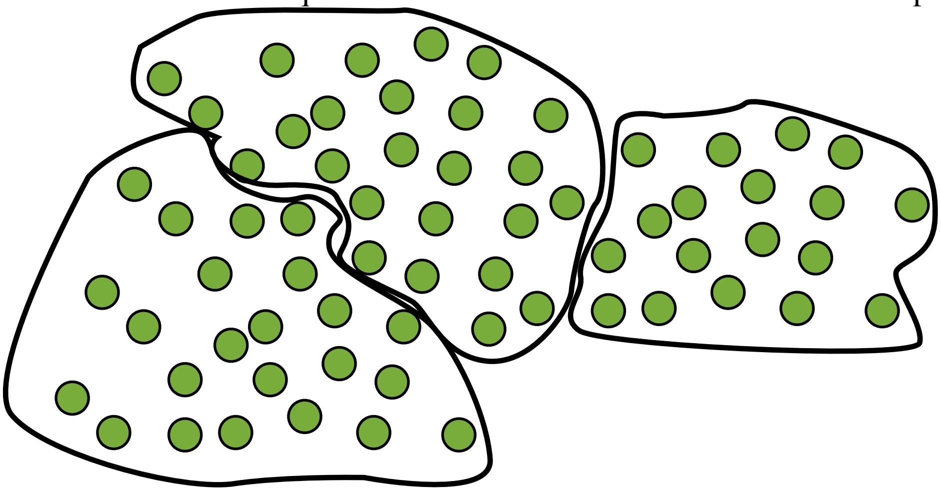
Des stratégies pour dénombrer.

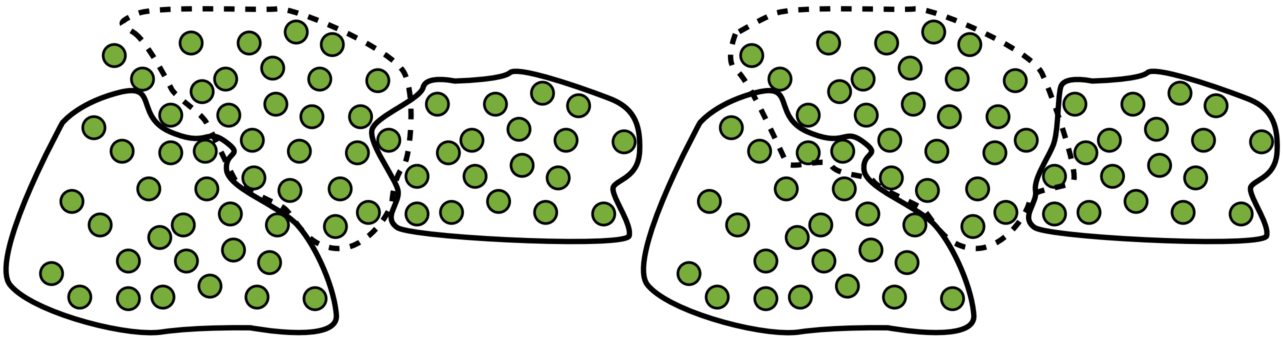
Le présent document décrit certaines stratégies pour dénombrer une collection d'objets, c'est à dire pour trouver combien il y a d'objets dans la collection
Il est difficile de savoir a priori quelle stratégie sera efficace dans quel problème de dénombrement.
C'est pourquoi il est important de garder l'esprit ouvert : il est légitime d'avoir une stratégie préférencielle, mais il faut savoir en changer quand elle ne permet pas d'aboutir.

Une stratégie de base : la partition.

Il s'agit de partager l'ensemble à dénombrer en plusieurs sous-ensembles.
On dénombre ensuite chacun des petits ensembles et on calcule la somme des effectifs.
Les risques d'erreurs sont moindres qu'on dénombrant directement une ensemble important.

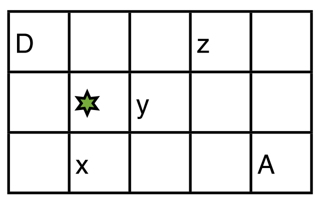


Quand on doit compter des points dessinés comme ci-dessus, une caractéristique de cette méthode passe inaperçue tant elle est évidente : chaque point doit être dans un des sous-ensembles, et dans un seul.



Ce critère n'est pas toujours aussi facile à vérifier quand on dénombre des objets mathématiques
Il ne sert par à rien dans le problème 1 de la fiche de compter combien de chemins passent par la case «étoile» si on n'a pas réfléchi aux **autres** familles : est-il facile de savoir combien de chemins ne passent pas par l'étoile ?

La réalisation d'une partition est probablement la méthode la plus fréquente pour dénombrer, mais elle suppose de commencer par définir avec précision les sous-ensembles pour s'assurer qu'il s'agit bien d'une partition.



Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.

Quelques exemples de partitions pour l'exercice 1 (pas forcément très habiles).

- Les trajets qui commencent vers le bas / ceux qui commencent vers la droite.
- Les trajets qui passent par l'étoile / ceux qui ne passent pas par l'étoile.
- Les trajets dans lesquels les deux descentes se suivent / ceux où elles ne se suivent pas.
- Les trajets qui passent par x / ceux qui passent par y / ceux qui passent par z.

Il arrive qu'une première partition semble correcte mais que les ensembles obtenus soient encore trop compliqués pour qu'on voit facilement combien ils ont d'éléments… on peut alors redécouper en ensembles plus petits, toujours en s'assurant que chaque objet sera compté une fois et une seule.

Deuxième stratégie : La recherche d'une règle.

Quand les ensembles à dénombrer sont organisés (ce qui est souvent le cas en mathématiques) on peut laisser de côté provisoirement le problème posé et étudier des problèmes organisés de la même façon mais avec des nombres plus petits.

Dans l'exercice 12 par exemple, on peut facilement dresser le tableau suivant pour les premiers assemblages (en comptant les cubes sur le dessin).

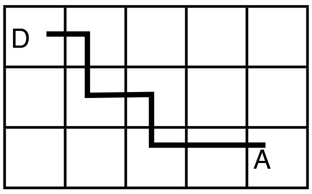
numéro de l'assemblage	1	2	3	4
nombre de cubes	1	4	9	16

Une conjecture apparait alors facilement : le nombre de cubes de l'assemblage semble être le carré du numéro de l'assemblage. Si on parvient à prouver cette conjecture, il suffira de l'appliquer au nombre 100. Le nombre de cube de l'assemblage n° 100 serait 10 000.
Pour que cette méthode soit correcte, l'étape de preuve est indispensable.

On peut résoudre des problèmes analogues au problème numéro sur de toutes petites grilles et tenter de trouver une logique aux résultats obtenus.

Troisième stratégie : Reformulation.

la façon dont on représente ou désigne les objets à dénombrer rend le dénombrement facile ou difficile. Dans le problème numéro 1, si les chemins sont dessinés sur la grille le dénombrement n'est pas très facile, mais on peut tenter de représenter chaque chemin par une suite de lettres ou de chiffres.



Quelques exemples :
- Si on numérote les cases de 1 à 15, le chemin représenté ci-contre peut se désigner par 1-2-7-8-13-14-15
- On peut décider de ne noter que les cases dans lesquelles se produit un changement de direction, le même chemin se décrit alors par 2-7-8-13
- Si on décrit le chemin par une suite de lettres H pour désigner un déplacement horizontal et V pour désigner un déplacement vertical, le même chemin se représente par HVHVHH
- Si on remarque que chaque chemin comporte 6 déplacements élémentaires dont deux sont verticaux, on peut noter seulement les numéros correspondant aux déplacements verticaux. Le même chemin se représente alors par 2-4

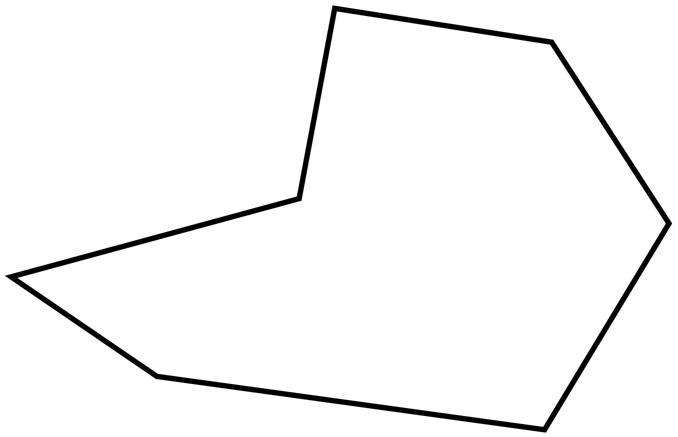
Toutes ces reformulations ne sont pas également efficaces…mais certaines sont très efficaces.

Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.

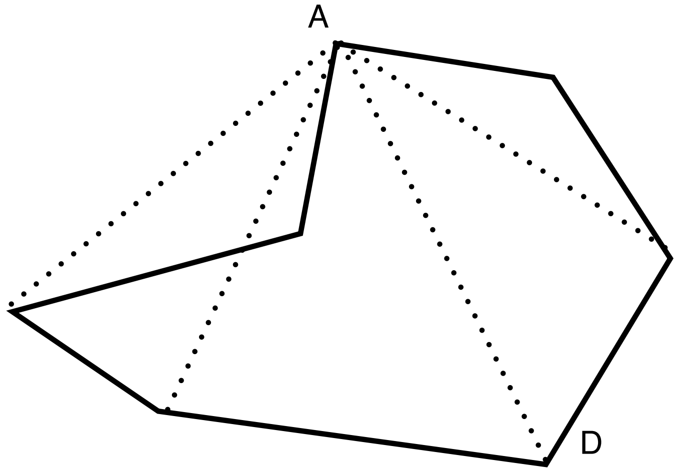
Quatrième stratégie : compter plusieurs fois la même chose.

Vous êtes dans une école maternelle et vous voulez compter les cordes à sauter. Malheureusement elles forment un nœud inextricable. Si les cordes sont en bon état et comportent toutes deux poignées, il vous suffit de compter les poignées, ce qui peut se faire sans dénouer les cordes, puis de diviser par deux.
Des situations analogues se présentent souvent en mathématiques : on peut assouplir l'exigence de compter chaque chose une fois et une seule que nous avons présentée dans la méthode de partition. Il suffit que tous les objets soient comptés **le même nombre de fois**. Si chaque objet est compté 5 fois, on divise le nombre obtenu par 5.

Cette méthode est très efficace pour compter le nombre de diagonales d'un polygone.
Considérons ce polygone à 7 sommets :



Il y a 4 diagonales qui ont pour extrémité le point A.
Il y a également 4 diagonales ayant pour extrémité chacun des autres sommets.



On a ainsi compté 28 diagonales (4 pour chacun des 7 sommets).
Cependant, la diagonale [AD] a été comptée deux fois (parmi celles qui ont pour extrémité A et parmi celles qui ont pour extrémité D).
Il en est de même des autres diagonales.
On a compté 28 diagonales par un procédé dans lequel chaque diagonale est comptée deux fois, le nombre réel de diagonales est donc 28 : 2 = 14