<u>Première partie de l'épreuve</u>

EXERCICE 1. (4 points)

Dans cet exercice, six affirmations sont proposées. Pour chacune d'elles, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte pas de point.

1. **Affirmation 1** : Un nombre positif est toujours supérieur ou égal à sa racine carrée.

2. **Affirmation 2** : La fraction $\dfrac{201\,134\,546\,112}{145\,261\,781\,121}$ est irréductible.

3. Dans un sachet opaque, on a mélangé 35 chocolats noirs et 20 chocolats blancs. On suppose que les chocolats sont indiscernables au toucher. On prend au hasard un chocolat dans le sachet.
   Affirmation 3 : La probabilité que le chocolat extrait du sachet soit blanc est de $\dfrac{4}{7}$.

4. Dans *Le Monde* du 27 mars 2010, on pouvait lire : « Dans l'ensemble des aéroports du monde, en 2009, environ 25 millions de bagages ont été perdus, provisoirement ou définitivement. (…) L'étude note cependant une amélioration puisqu'en 2008, ce sont 32,8 millions de bagages qui avaient été égarés, <u>soit 23,8 % de plus qu'en 2009</u>. ».
   Affirmation 4 : L'extrait souligné est exact.

5. **Affirmation 5** : Il existe au moins un nombre entier compris entre 11 000 et 12 000, dont le plus grand diviseur commun avec 2 180 est 545.

6. Une enseigne est formée de deux boules pleines, de rayons différents, constituées du même bois. L'une pèse 24 kg et l'autre pèse 3 kg. La quantité de peinture pour les recouvrir est proportionnelle à la surface à peindre. Il faut 900 g de peinture pour recouvrir la grosse boule.
   Affirmation 6 : Il faut 112,5 g de peinture pour recouvrir la petite boule.

EXERCICE 2. (3 points)

1. On appelle triplet pythagoricien, tout triplet (a, b, c) formé de trois entiers positifs non nuls tels que : $a^2+b^2=c^2$
   a) Vérifier que le triplet (3, 4, 5) est un triplet pythagoricien.
   b) Vérifier que, quel que soit l'entier positif n non nul, on a : $(3n)^2+(4n)^2=(5n)^2$.
   c) En déduire un autre triplet pythagoricien composé d'entiers tous supérieurs à 1000.

2. On s'intéresse maintenant à des triplets (a, b, c) tels que :
   $$a=2xy \quad ; \quad b=y^2-x^2 \quad ; \quad c=y^2+x^2$$
   où x et y sont deux nombres entiers positifs non nuls, $x<y$.

   À l'aide d'un tableur, on a obtenu la feuille de calcul reproduite ci-après.

	A	B	C	D	E	F	G
1	valeur de x	valeur de y	a	b	c	$a^2 + b^2$	c^2
2	1	2	4	3	5	25	25
3	1	3	6	8	10	100	100
4	3	6	36	27	45	2025	2025
5	4	15	120	209	241	58081	58081
6	8	12	192	80	208	43264	43264
7	12	15	360	81	369	136161	136161
8	7	8	112	15	113	12769	12769
9	2	3	12	5	13	169	169
10	11	13	286	48	290	84100	84100
11	7	8	112	15	113	12769	12769
12	4	5					

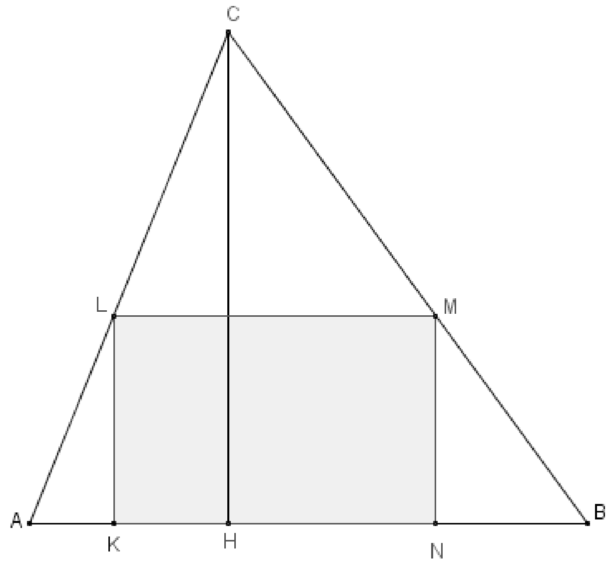
a) Donner une formule qui, entrée dans la cellule D2 puis recopiée vers le bas, permet de compléter la colonne D.
b) Recopier et compléter la ligne 12.
c) Au vu de cette feuille de calcul, quelle conjecture peut-on faire quant à la nature des triplets (a, b, c) ainsi définis ? Prouver cette conjecture.

3. Le triplet pythagoricien (3 ; 4 ; 5) a la particularité d'être constitué de trois nombres entiers consécutifs. Existe-t-il d'autres triplets pythagoriciens ayant cette particularité ? Justifier.

EXERCICE 3. (5 points)

ABC est un triangle tel que : AB = 14, AC = 13 et BC = 15.
Soit H le pied de la hauteur du triangle ABC issue de C.
À tout point K du segment [AH], on associe le rectangle KLMN inscrit dans le triangle ABC, tel que les points L et M appartiennent respectivement aux segments [AC] et [BC] (*figure 1*).

figure 1

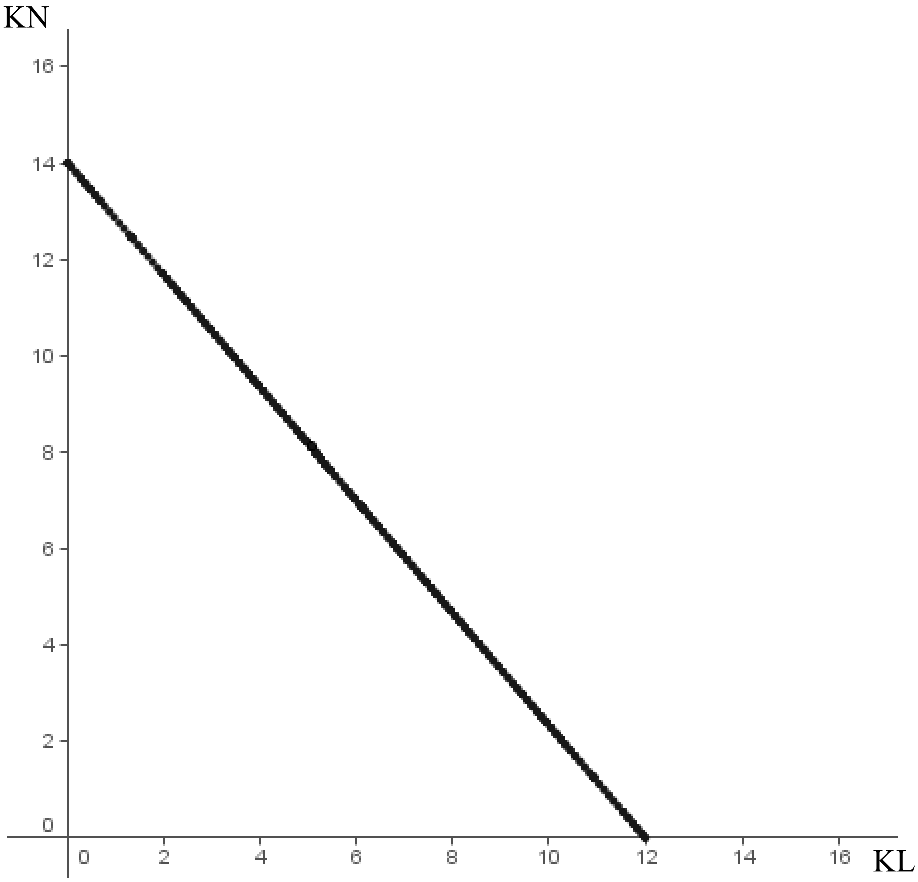


On cherche la position du point K sur le segment [AH] pour laquelle KLMN est un carré. On admet que cette position existe et est unique.

1. Montrer que AH = 5 et CH = 12.

2. On construit la figure avec un logiciel de géométrie dynamique, le point K étant mobile sur [AH].
Le logiciel permet un relevé des valeurs de KL et de KN lorsque K varie sur [AH] et fournit une représentation graphique des variations de KN en fonction de KL (*figure 2*).

figure 2



a) On peut constater que cette représentation graphique est limitée par les points de coordonnées (12 , 0) et (0 , 14). Pourquoi était-ce prévisible ?

b) À l'aide du graphique (*figure 2*), déterminer un encadrement par deux entiers consécutifs de la longueur KN pour laquelle KLMN est un carré. Justifier.

3. a) Exprimer AK et BN en fonction de KL.

b) En déduire que $\mathrm{KN} = 14 - \frac{7}{6}\mathrm{KL}$.

4. Quelle est la position exacte du point K sur le segment [AH] pour laquelle KLMN est un carré ?