Première partie de l'épreuve

EXERCICE 1 (3 points)

Dans cet exercice, 5 affirmations sont proposées. Pour chacune, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, puis justifier la réponse.
Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point.
Une réponse fausse n'enlève pas de point.

1. Soient a et b deux nombres strictement positifs.
   Affirmation 1 : $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$.

2. Soit a un nombre strictement supérieur à 1.
   Affirmation 2 : Si les longueurs des côtés d'un triangle sont a, $\frac{1}{2}(a^2-1)$ et $\frac{1}{2}(a^2+1)$, alors ce triangle est rectangle.

3. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.
   Affirmation 3 : La probabilité d'obtenir pile à l'un des deux lancers et face à l'autre est $\frac{1}{3}$.

4. Un article a le même prix dans deux magasins A et B.
   Dans le magasin A, le prix de l'article subit successivement une baisse de 20% puis une hausse de 20%.
   Dans le magasin B, le prix de l'article subit successivement une hausse de 20% puis une baisse de 20%.
   Affirmation 4 : À la suite de ces modifications de prix, il est plus rentable d'acheter alors l'article dans le magasin A que dans le magasin B.

5. La longueur du côté d'un carré augmente de 5%.
   Affirmation 5 : le périmètre du carré augmente de 20% .

EXERCICE 2 (5 points)
On justifiera toutes les réponses.

On appelle « fraction égyptienne » toute fraction de la forme $\frac{1}{n}$, n désignant un nombre entier naturel non nul. Dans l'Egypte ancienne, on n'écrivait les nombres rationnels positifs inférieurs à 1 que sous la forme de sommes de « fractions égyptiennes » toutes différentes.

Par exemple, $\frac{25}{28}$ peut s'écrire $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}$.

Le but du problème est de présenter quelques méthodes de décomposition de nombres rationnels en somme de « fractions égyptiennes » toutes différentes.

Partie A : Exemples

1. Calculer la somme des six « fractions égyptiennes » $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ et $\frac{1}{64}$.

2. Décomposer $\frac{5}{8}$ en somme de « fractions égyptiennes » toutes différentes, dont les dénominateurs sont tous des puissances de 2.

Partie B : Présentation d'une méthode de décomposition dans un cas particulier

On s'intéresse au cas où la fraction à décomposer a un numérateur égal à 2 et un dénominateur égal au produit de deux nombres entiers naturels impairs p et q.

1. Démontrer la formule $\frac{2}{pq} = \frac{1}{p\left(\frac{p+q}{2}\right)} + \frac{1}{q\left(\frac{p+q}{2}\right)}$
2. Justifier que les dénominateurs des fractions précédentes sont des nombres entiers naturels.
3. **En utilisant la formule établie à la question 1**), trouver deux décompositions différentes de $\frac{2}{15}$ en somme de « fractions égyptiennes » différentes.
4. Soit n un nombre entier naturel non nul. Donner une décomposition de la fraction $\frac{2}{2n+1}$ en somme de deux « fractions égyptiennes » différentes.

Partie C « Algorithme glouton » de Fibonacci

En 1201, Léonard de Pise (1175-1250), dit « Fibonacci », prouva que tout nombre rationnel compris entre 0 et 1 peut s'écrire sous la forme d'une somme de « fractions égyptiennes » toutes différentes et proposa la méthode suivante pour obtenir une telle décomposition :

« Soustraire à la fraction donnée la plus grande fraction égyptienne possible qui lui est inférieure, répéter l'opération avec la nouvelle fraction, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on obtienne 0. »

1. Appliquer cet algorithme à $\frac{13}{81}$ et donner une décomposition de la fraction $\frac{13}{81}$ en somme de trois « fractions égyptiennes » toutes différentes.

2. Dans le papyrus Rhind (1650 av JC), exposé au *British Museum*, figure une des plus anciennes approximations du nombre π égale à $\frac{256}{81}$ (écriture moderne).

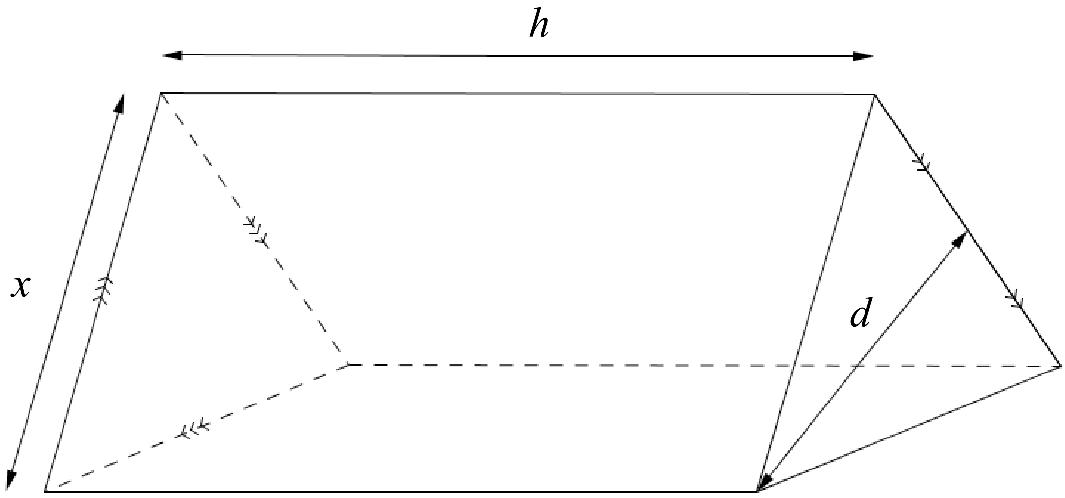
   a) Ecrire $\frac{256}{81}$ sous la forme d'une somme d'un entier naturel et d'une fraction comprise entre 0 et 1.

   b) Proposer une écriture de l'approximation de π donnée dans le papyrus Rhind sous forme d'une somme d'un nombre entier naturel et de « fractions égyptiennes » toutes différentes.

EXERCICE 3 (4 points)

On justifiera toutes les réponses.

Un fabricant vend de la pâte d'amande dans un emballage cartonné ayant la forme d'un prisme droit dont la base est un triangle équilatéral (voir la figure ci-dessous).



x est la longueur d'un côté de la base triangulaire.
d est la hauteur de cette base triangulaire.
h est la hauteur du prisme droit.

Dans tout l'exercice, on exprime les longueurs en cm, les aires en cm^2 et les volumes en cm^3.

Questions préalables

1. Représenter sur la copie un patron de l'emballage pour les valeurs $x = 3$cm et $h = 6$cm.

2. On désigne par A l'aire du triangle équilatéral de base. Montrer que $A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$.

*Dans la suite du problème, les emballages ont un volume égal à **100 cm^3**.*

3. a) Donner l'expression de h en fonction de x.

   b) En déduire que l'aire S du patron de cet emballage, exprimée en cm^2, est donnée par la formule
$$S = \frac{400\sqrt{3}}{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2.$$

4. On a construit une feuille de calcul, reproduite ci-après, donnant les valeurs de S en fonction des valeurs de x, ainsi que la représentation graphique de S en fonction de x.

   a) Donner une méthode permettant de remplir la colonne A (de la ligne 2 à 35) en utilisant la fonction de « recopie vers le bas ».

b) Donner une formule qui, entrée dans la cellule B2, puis recopiée vers le bas, permet de compléter la colonne B (de B3 à B35).
Indication : pour calculer $\sqrt{3}$ dans le tableur, on fait appel à la commande : « racine(3) ».

Le fabricant souhaite minimiser la quantité de carton utilisée.

c) En utilisant les résultats de la feuille de calcul reproduite ci-après, donner à 0,5cm près la valeur de x qui minimise la quantité de carton utilisée pour l'emballage.

d) Calculer la hauteur de l'emballage pour cette valeur approchée de x.

FEUILLE DE CALCUL

	A	B
1	x	**Aire S**
2	0,5	1385,86
3	1	693,69
4	1,5	463,83
5	2	349,87
6	2,5	282,54
7	3	238,73
8	3,5	208,56
9	4	187,06
10	4,5	171,50
11	5	160,21
12	5,5	152,16
13	6	146,65
14	6,5	143,18
15	7	141,41
16	7,5	141,09
17	8	142,03
18	8,5	144,08
19	9	147,13
20	9,5	151,09
21	10	155,88
22	10,5	161,46
23	11	167,77
24	11,5	174,78
25	12	182,44
26	12,5	190,74
27	13	199,65
28	13,5	209,15
29	14	219,23
30	14,5	229,86
31	15	241,04
32	15,5	252,76
33	16	265,00
34	16,5	277,76
35	17	291,04