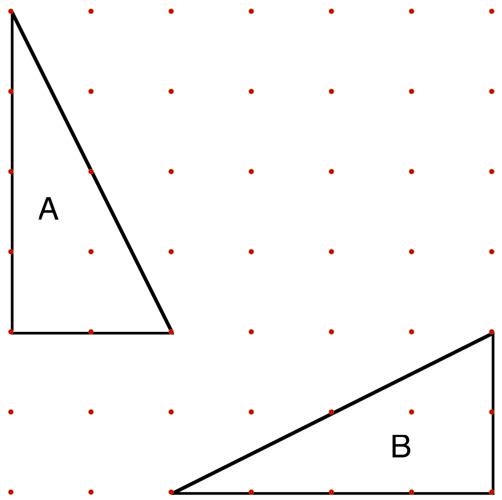
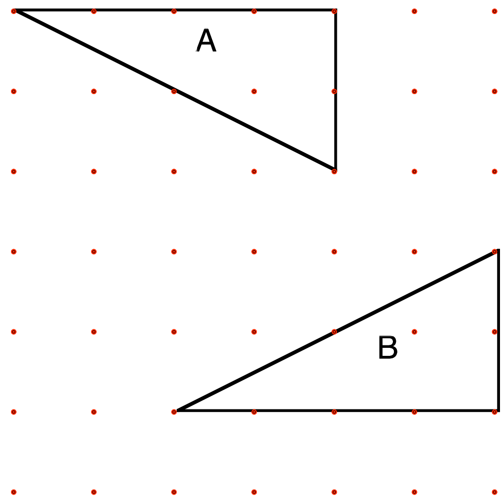
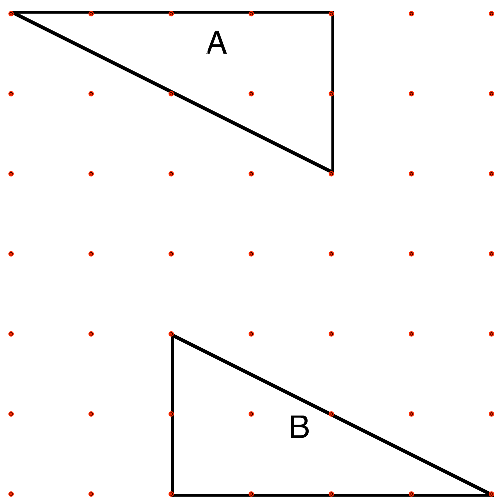
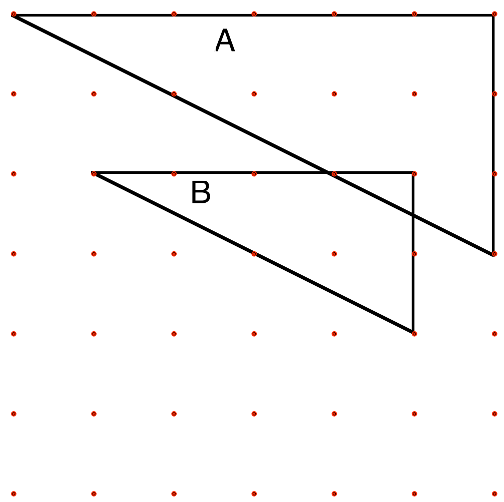
Exercices à propos des transformations géométriques.

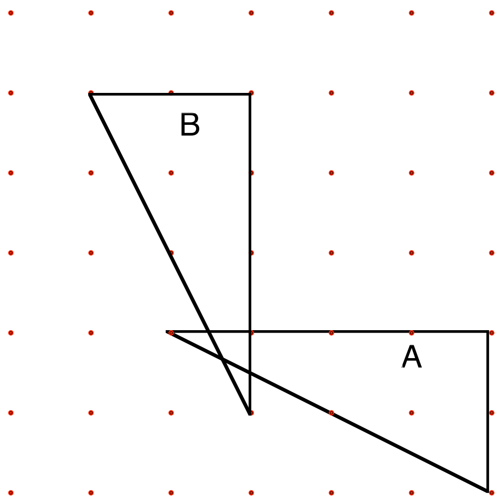
1) **Pour chacune des figures suivantes, le triangle B est-il l'image de A par une transformation ? Si oui, préciser laquelle.** On ne demande pas seulement le type de transformation, mais aussi de préciser suivant les cas l'axe, le centre, l'angle, le rapport…

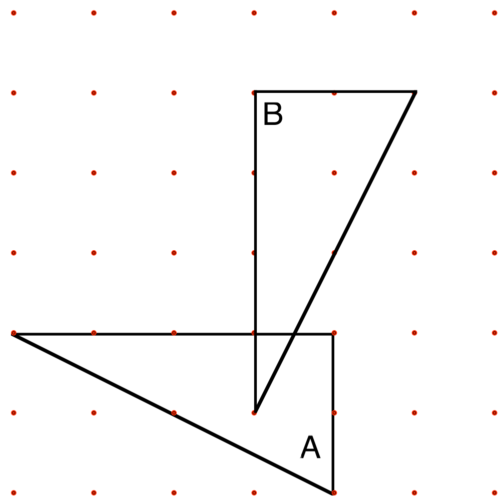












2) **Constructions d'images. Tous les exercices sont indépendants.**
Sauf précision du contraire les points A,B,C,R, S… sont quelconques.
A l'exception de l'exercice d, les constructions se font à la règle non graduée et au compas.

a) Construire l'image du triangle ABC par la rotation de centre R, d'angle 60° dans le sens des aiguilles d'une montre.
b) O est un point de la médiatrice de [AB], construire l'image de ABC par la rotation de centre O qui transforme A en B.
c) ABCD est un parallélogramme de centre O, et P est un point de (AB), construire à la règle non graduée uniquement le symétrique de P par rapport à O.
d) ABC est un triangle rectangle en A, construire à la règle non graduée et à l'équerre l'image de ABC par une homothétie de centre B et de rapport 2.

*3) **Recherche de transformations laissant une figure invariante.***

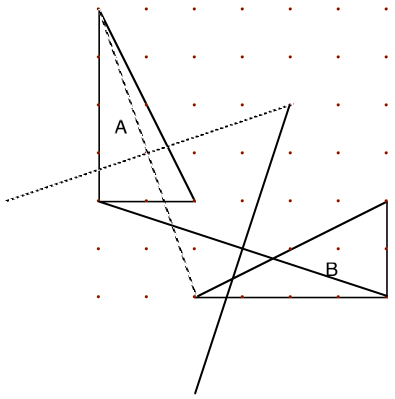
a) Quelles sont les figures usuelles qui ont un centre de symétrie ?
b) Quelles sont les figures usuelles qui ont un ou des axes de symétrie ? préciser quels sont les axes de symétrie.
c) Quelles sont les figures usuelles invariantes par une ou plusieurs rotations ? Préciser le centre et l'angle des rotations.
d) Quelles sont les figures usuelles invariantes par une homothétie de rapport 2 ?
e) Un polygone régulier est invariant par une rotation de 40° (dont le centre est celui du polygone). Que peut on dire du nombre de côtés de ce polygone ?

4) **Problèmes difficiles à propos des transformations.**

a) Construire à la règle et au compas la bissectrice d'un angle dont le sommet est hors de votre feuille.
b) Construire le centre du cercle circonscrit à un triangle dont un sommet est hors de votre feuille.
c) ABCD est un parallélogramme de centre O, et R un point quelconque, construire à la règle non graduée uniquement le symétrique de R par rapport à O.
d) On donne deux segments [AB] et [A'B'], de même longueur et non parallèles. Montrer qu'il existe une rotation qui transforme A en A' et B en B'.

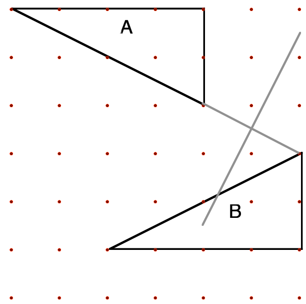
e) Trois droites parallèles étant données, construire un triangle équilatéral ayant un sommet sur chaque droite.
f) On donne deux cercles de rayons différents tels que le plus petit ne soit pas entièrement à l'intérieur de l'autre. Construire les droites qui sont tangentes à la fois aux deux cercles.
g) Trois droites parallèles étant données, construire un triangle isocèle rectangle ayant un sommet sur chaque droite.
h) On donne un triangle quelconque ABC, construire un carré dont deux sommets sont Sur (AB), un sommet sur [AC] et un sommet sur [BC].

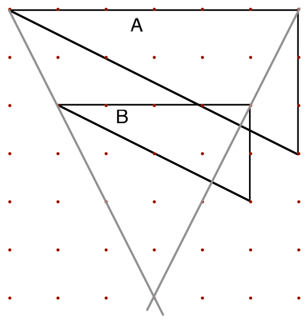
Corrigé des exercices sur les transformations.



On commence par déterminer visuellement une transformation probable (ici une rotation), puis on cherche à la préciser.
Si M' est l'image de M par une rotation de centre O, M et M' sont sur un même cercle de centre O, donc O est sur la médiatrice de [MM'].
Le seul point qui peut servir de centre de rotation est l'intersection des deux médiatrices tracées sur la figure ci-dessus. Il faut encore vérifier que les deux sommets du triangle A ont bien tourné du même angle, et que le troisième sommet a aussi été transformé par la même rotation.
L'énoncé ne définissant pas précisément les figures (le réseau de points forme-t-il des carrés ? Les sommets des triangles sont-ils sur les points du réseau ?) il ne peut pas être question de démonstration dans cet exercice ni dans les suivants.

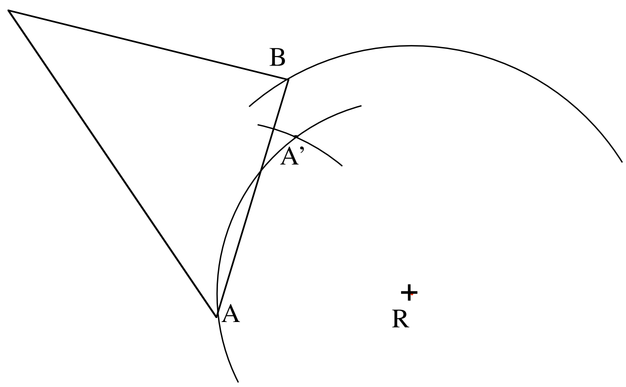
Pour la deuxième figure, on constate que le triangle est « retourné », seule une symétrie axiale peut convenir. Traçons la médiatrice de deux sommets correspondants, on voit qu'elle ne convient pas, B n'est donc l'image de A dans aucune symétrie axiale. Il faudrait combiner plusieurs transformations pour obtenir B à partir de A.



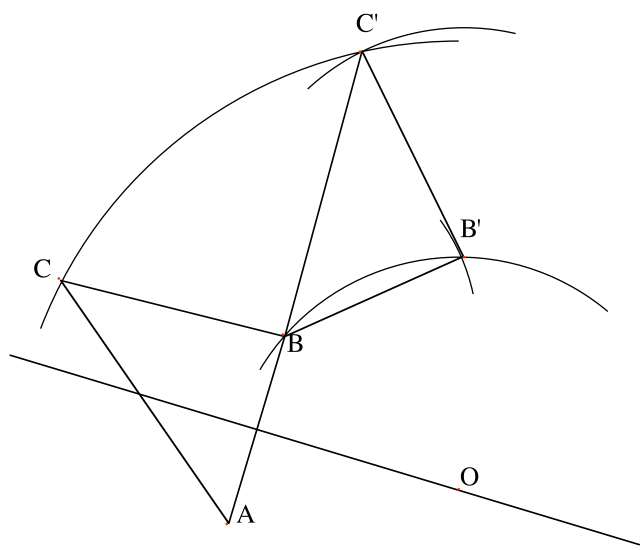


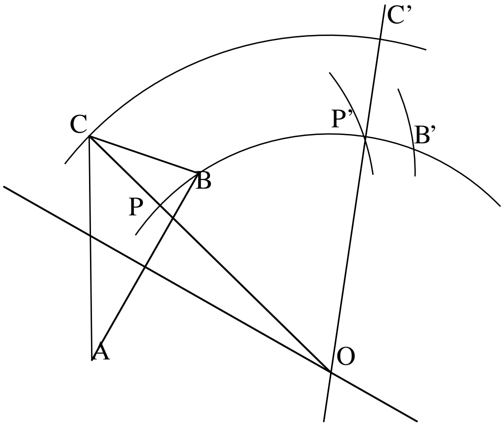
Dans une homothétie, un point et son image sont alignés avec le centre. Les deux droites tracées sur cette figure déterminent donc le seul centre possible d'une homothétie qui transforme A en B. Il faut ensuite vérifier que chacun des sommets est bien transformé par la même homothétie (même centre et rapport 1/2).

Exercice 2
a) L'image de A est sur le cercle de centre R passant par A. pour obtenir un angle de 60°, on place A' pour que ARA' soit équilatéral (attention, parmi les deux triangles possibles, un seul correspond au sens de la rotation demandée).
Les points B' et C' peuvent être placés de la même façon, mais on peut aussi utiliser le fait que la rotation conserve les longueurs, donc AB = A'B', AC = A'C'…



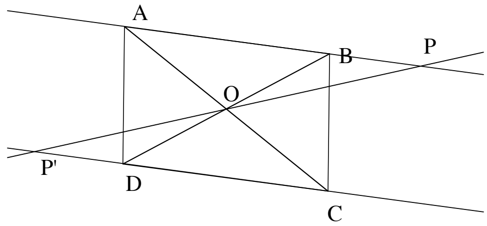
b) Le point B', image de B dans la rotation, est situé sur le cercle de centre O passant par B. De plus on a AB = BB'.
Pour placer C', on a utilisé la conservation des longueurs (BC = B'C') et le fait que C' est sur le cercle de centre O passant par C.

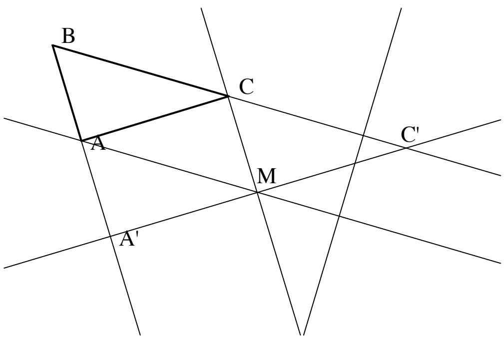




Dans cette deuxième version, C' est construit en utilisant l'angle de la rotation. Pour reporter l'angle de la rotation, on utilise les points P et P', situés sur le même cercle que A et B.

c) P', image de P dans la symétrie centrale de centre O, est sur la droite (PO).
Par ailleurs, P est sur la droite (AB), donc P' est sur l'image de (AB) par la symétrie de centre O, qui est (CD). P' est donc l'intersection de (PO) et (CD).



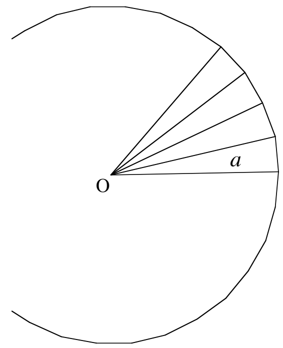


d) Rappel : quand une construction résiste, il faut partir de la figure terminée, construite avec des moyens non autorisés dans l'exercice, l'observer, faire des tracés dessus pour chercher des idées…
La construction proposée ici consiste à construire le milieu M de [A'C'] à l'aide de la propriété des milieux appliquée au triangle BA'C'.
La parallèle à (BC') qui passe par le milieu de [BA'] passe aussi par le milieu de [A'C']. Il en est de même pour la parallèle à (BA') qui passe par le milieu de [BC'].

3) **Recherche de transformations laissant une figure invariante.**
Le terme « figure » est assez vague, il n'est pas question ici de rechercher l'exhaustivité. On s'en tiendra aux figures pouvant être désignées par un nom au crpe.

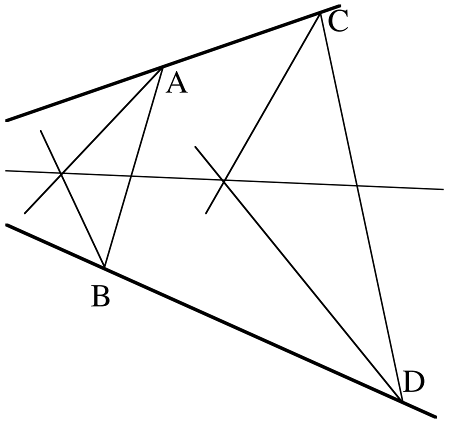
	Axes de symétries	Centres de symétrie	Centres et angles des rotations autres que les symétries centrales.	Centres des homothéties de rapport différent de 1.
Point P	Droites passant par P	P	Centre P, tous angles	P
Segment [AB]	La médiatrice de [AB], (AB)	Le milieu de [AB]		
Droite	Elle même et toutes ses perpendiculaires	Tous les points de la droite		Tout point de la droite
Demi-droite	La droite support.			Son extrémité
Parallélogramme		Son centre		
Losange	Ses diagonales	Son centre		
Rectangle	Médiatrices des côtés	Son centre		
Carré	Diagonales et médiatrices des côtés	Son centre	Son centre, multiple de 90°	
Triangle isocèle	Médiatrice de la base			
Triangle équilatéral	Médiatrices des côtés		Son centre, multiple de 120°	
Cercle de centre O	Droites passant par O	O	Centre O, tous angles.	
Pentagone régulier	Médiatrices des côtés		Son centre, angle multiple de 72°	
Hexagone régulier	Diagonales et médiatrices des côtés	Son centre	Son centre, angle multiple de 60°	
Octogone régulier	Diagonales et médiatrices des côtés	Son centre	Son centre, angle multiple de 45°	

Soit a la mesure en degrés d'un angle dont le centre O, centre du polygone régulier, et dont les côtés passent par deux sommets consécutifs.
Le polygone étant invariant dans une rotation d'angle 40°, un sommet se transforme en un autre sommet, 40 est donc un multiple de a. $40 = k\,a$, avec k entier
Or, si N est le nombre de côtés du polygone, $a = 360/N$
On obtient donc $40 = k \times 360/N$ d'où on tire $N = 9k$.
Le nombre de côtés du polygone est donc un multiple de 9.

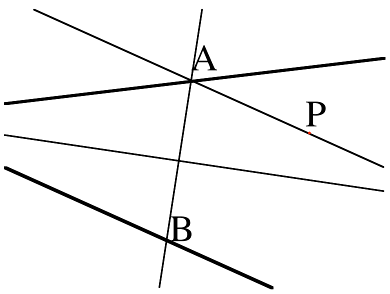


Problèmes difficiles à propos des transformations.

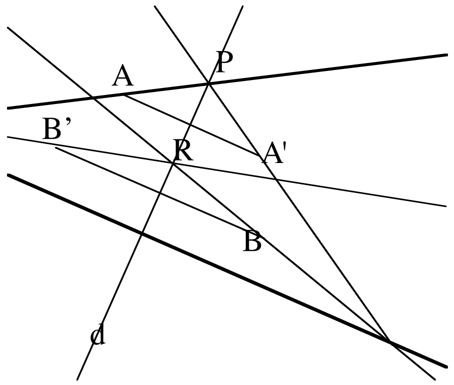
a) quelques constructions de la bissectrice sans utiliser le sommet.



Soit S le sommet inaccessible, traçons deux bissectrices du triangle SAB, leur intersection est un point de la bissectrice cherchée. On construit un autre point de la même façon en utilisant le triangle SCD.



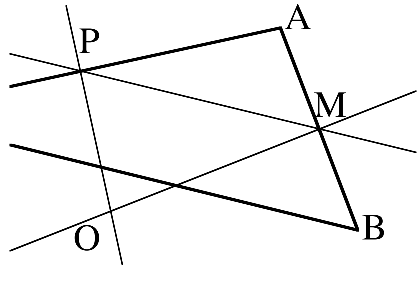
Traçons la parallèle à (BS) par A, puis la bissectrice de $\widehat{SAP}$.
On peut démontrer que le triangle ABS est isocèle en S, donc la médiatrice de [AB] est aussi la bissectrice de l'angle de sommet S.

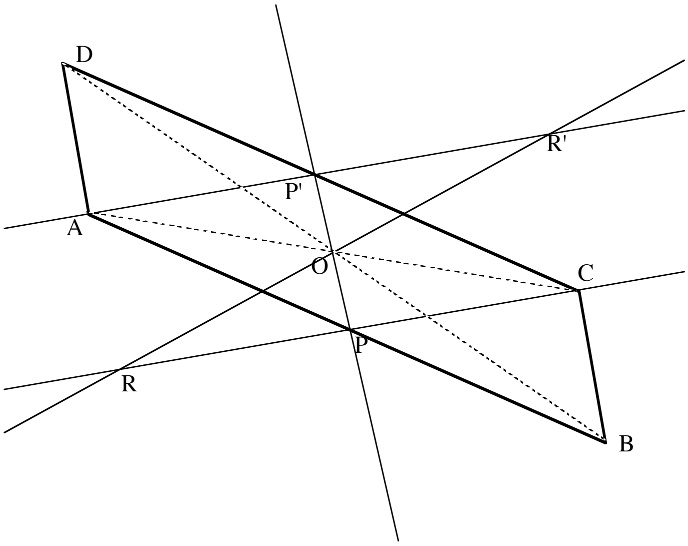


Traçons une droite d, perpendiculaire à un côté de l'angle donné, puis le symétrique de l'angle donné par rapport à d.
(BR) est la bissectrice de l'angle symétrique.
(B'R), symétrique de (BR) par rapport à d, est la bissectrice cherchée.

b) constuction du centre du cercle circonscrit à un triangle dont un sommet est inaccessible.

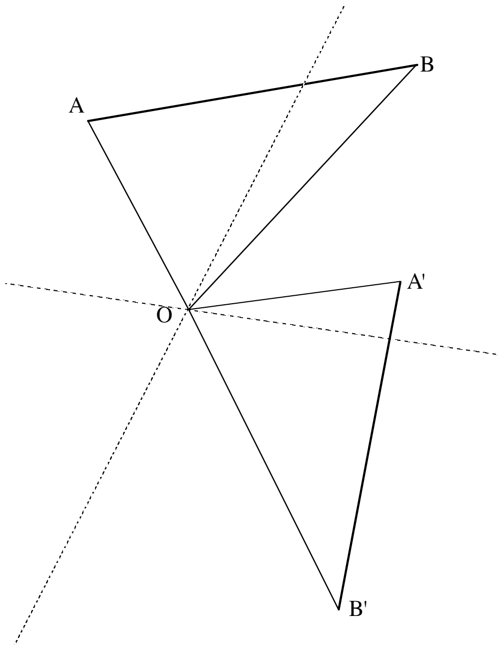
On trace la médiatrice de [AB], ce qui permet d'obtenir également le milieu M de [AB].
On trace la parallèle au côté [BC] du triangle par le point M, elle coupe [AC] en P qui est le milieu de [AC].
La perpendiculaire à (AC) passant par P est donc la médiatrice de [AC].
On a alors tracé les médiatrices de deux côtés du triangle, leur intersection est le centre du cercle circonscrit.



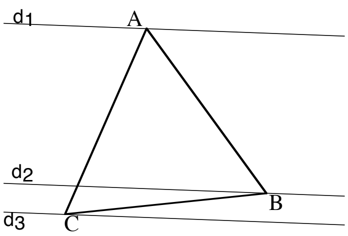


c) R’, symétrique de R par rapport à O, est situé sur (RO).
La droite (RC) coupe (AB) en P.
On construit P’, symétrique de P par rapport à O comme dans l’exercice 2c.
La droite (AP’) est symétrique de (CP), elle contient donc le symétrique de R.
On obtient donc R’ comme intersection de (RO) et (AP’).

d) Soit O le point d’intersection des médiatrices de [AA’] et [BB’].
OA = OA’, OB = OB’ et AB = A’B’, donc les triangles OAB et OA’B’ sont isométriques (superposables), par conséquent les angles $A\hat{O}B$ et $A'\hat{O}B'$ sont égaux.
Comme $A\hat{O}A' = A\hat{O}B + B\hat{O}A'$ et $B\hat{O}B' = A'\hat{O}B' + B\hat{O}A'$,
les angles $A\hat{O}A'$ et $B\hat{O}B'$ sont égaux.
La rotation de centre O et d’angle $A\hat{O}A'$ transforme donc A en A’ et B en B’.

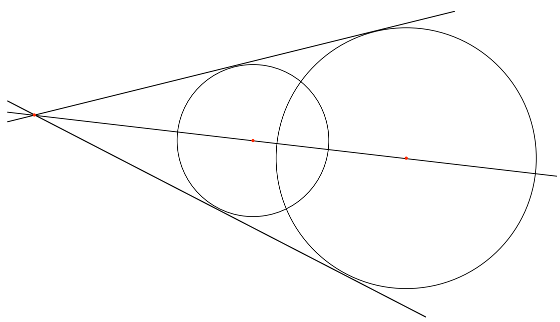


Remarque : cette démonstration met en évidence la nature du problème posé : il faut s’assurer que les deux points tournent bien du même angle. Cependant elle n’est pas entièrement correcte, car selon les situations, les additions d’angles utilisées doivent être remplacées par d’autres additions ou par une soustraction. La place manque pour étudier ici tous les cas, mais la conclusion est cependant correcte.



e) Observons la figure terminée (tracée en commençant par le triangle).
Le point B est l’image de C par une rotation de centre A et d’angle 60°.
Comme C est sur d2, l’image de C est sur l’image de d2 dans cette rotation.
La construction est donc la suivante :
Placer Arbitrairement sur d1.
Construire l’image de d3 par une rotation de centre A et d’angle 60°.
B est l’intersection de d2 et de l’image de d3 dans la rotation.
C est l’intersection de d3 et de la médiatrice de [AB].

f) observons à nouveau la figure terminée (obtenue par exemple en traçant les tangentes « à peu près » à la règle).
Le grand cercle semble bien être l’image du petit par une homotéthie dont le centre est l’intersection des tangentes.
Une construction correcte des tangentes utilise cette homothétie. En voici un programme :



Tracer la droite passant par les centres des deux cercles.
Tracer deux rayons parallèles, du même côté de la droite précédente.
Tracer la droite joignant les extremités de ces rayons situées sur les cercles.
Le point d’intersection des deux droites tracées est le centre O de l’homothétie.

Tracer un cercle dont le diamètre a pour extrémités O et le centre d'un des deux cercles initiaux. Les intersections de ce nouveau cercle avec celui dont on vient d'utiliser le centre sont des points situés sur les tangentes (qui passent par ailleurs par O).
Cet exercice, comme le h qui suit, dépasse largement le niveau attendu en géométrie au CRPE. Il s'agit seulement d'illustrer le fait que l'homothétie est un outil utile en mathématique, même si sa présence au programme du CRPE peut laisser perplexe.

g) Cet exercice se résoud comme le e). Si on appelle ABC le triangle rectangle isocèle en A, C est l'image de B dans une rotation de centre A et d'angle 90°.

h) Exercice typique d'une méthode parfois nommée « par abandon de contrainte ». Le principe consiste à résoudre un problème proche mais moins difficile en supprimant une des conditions imposées. On espère que la ou les solutions de ce nouvel exercice nous mettront sur la voie de la solution du problème initial.

On peut par exemple chercher un carré dont deux sommets sont sur (AB) et un sur [AC] sans s'occuper pour l'instant de [BC].
Il est probable que le premier carré tracé selon ces nouvelles contraintes n'évoque pas grand chose, mais si on en trace un certain nombre, on constate que leurs quatrièmes sommets semblent alignés.
L'intersection de la droite qui passe par ces sommets et de [BC] semble être un bon candidat pour être un des sommets du problème complet…reste à démontrer que ce point fournit effectivement la solution du problème.