Initiation à la trigonométrie.

Un observateur situé sur la côte désire savoir à quelle distance il se situe d'un phare construit sur un rocher en mer, et donc inaccessible.

La trigonométrie permet de déterminer cette distance.

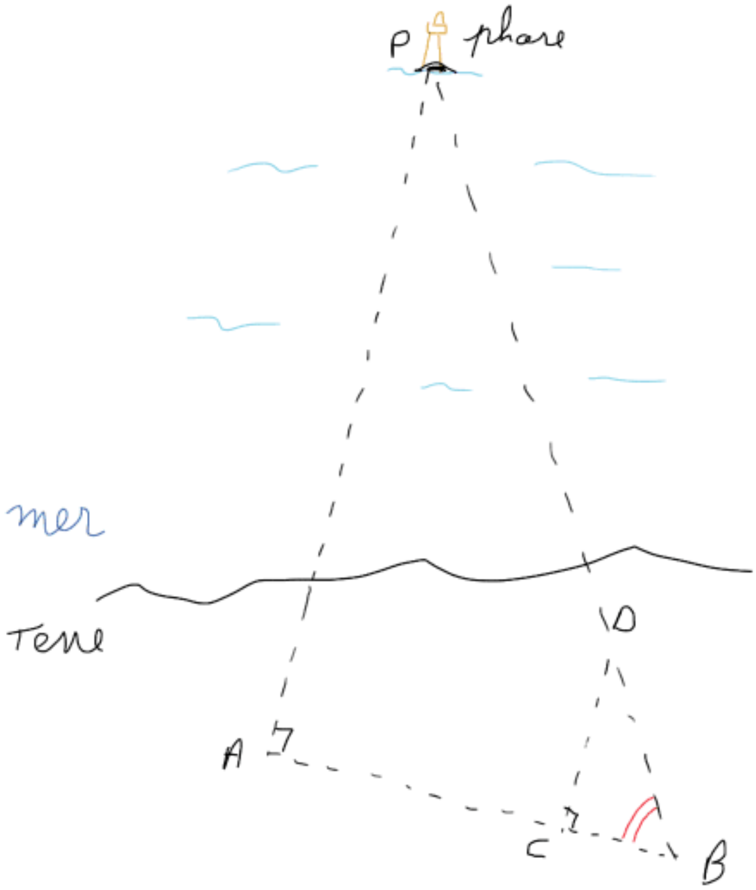
Tout en restant sur terre, l'observateur placé en A peut tracer une perpendiculaire à (AP), placer un point B sur cette perpendiculaire, et mesurer la distance AB et l'angle $\widehat{ABP}$.

Il peut aussi tracer un triangle BCD de tel façon que les triangles BAP et BCD forment une figure de Thalès.

Une façon possible de déterminer la longueur AB consiste à utiliser le théorème de Thalès :

C est sur (AB), D est sur (PB), de plus (AP) et (DC) sont parallèles, ce qui entraine l'égalité suivante : $\dfrac{BA}{BC} = \dfrac{AP}{CD}$

Les Points A, B, C et D étant situés sur terre, on peut mesurer les longueurs BA , BC et CD et calculer ensuite AP.



Une autre approche consiste à remarquer que le triangle BAP est un agrandissement du triangle BCD, les mesures des côtés du triangle BAP sont obtenues en multipliant les mesures des côtés de BCD par un même nombre. Appelons k ce nombre.

Il en résulte que $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{k \times CD}{k \times BC} = \dfrac{CD}{BC}$ On peut donc faire le même type de calcul que quand on utilise le théorème de Thalès, mais à partir de l'égalité $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{CD}{BC}$.

Jusqu'ici, cette nouvelle approche n'apporte rien de particulièrement intéressant par rapport à celle utilisant le théorème de Thalès : dans les deux cas il faut placer les points B, C et D puis mesurer les longueurs AB, BC et CD avant de procéder au calcul.

Cependant, alors que l'utilisation du théorème de Thalès suppose une disposition particulière des deux triangles, si on pense agrandissement, rien n'oblige à ce que le petit triangle soit tracé sur le terrain.

Si on trace sur une feuille de papier un triangle B'CD rectangle en C et dont l'angle de sommet B' a la même mesure que l'angle $\widehat{ABP}$ sur le terrain, le triangle BAP du terrain sera un agrandissement du triangle B'CD de la feuille.

On pourra donc, comme avec les points du terrain, affirmer que $\frac{AP}{AB} = \frac{k \times CD}{k \times B'C} = \frac{CD}{B'C}$ et calculer la longueur AP en utilisant l'égalité $\frac{AP}{AB} = \frac{CD}{B'C}$ après avoir mesuré B, CD et B'C. $AP = \frac{CD}{B'C} \times AB$

Cette version est légèrement plus intéressante que la précédente car les mesures de CD et B'C peuvent s'effectuer sur une feuille ce qui est souvent plus pratique que sur le terrain… mais il est encore possible de simplifier considérablement le travail de notre observateur.
Supposons que l'angle de sommet B mesure 59°. N'importe quel triangle rectangle ayant un angle de 59° peut donc convenir comme figure annexe pour calculer AP.
Si une bonne âme se sacrifie, calcule le rapport avec autant de précision que possible et publie que dans un triangle B'CD rectangle en C, si l'angle $\widehat{AB'D}$ mesure 59°, alors le rapport $\frac{CD}{B'C}$ vaut environ 1,664,

notre observateur n'a plus qu'à mesurer la longueur AB, l'angle $\widehat{ABP}$, et constater que puisque $\widehat{ABP}$ mesure 59°, alors AP mesure environ $1{,}664 \times AB$.

Cette méthode est avantageuse pour l'observateur : il doit mesurer seulement une longueur et un angle au lieu de trois longueurs. Sur le terrain ou en mer, les angles sont beaucoup plus faciles à mesurer que les longueurs.
Il reste néanmoins des difficultés : les triangles rectangles n'ont pas tous un angle de 59°.
Par ailleurs, il se pourrait que l'observateur cherche à calculer la longueur BP et non AP.
C'est pourquoi notre bonne âme a travaillé dur, pour calculer les rapports convenables pour tous les angles possibles, de degré en degré, et même de centième de degré en centième de degré. Elle a ensuite consigné ses résultats dans des livres appelés «tables de trigonométrie».

Ces livres ne sont plus utilisés, ils sont remplacés par la calculatrice, mais l'usage demeure le même.

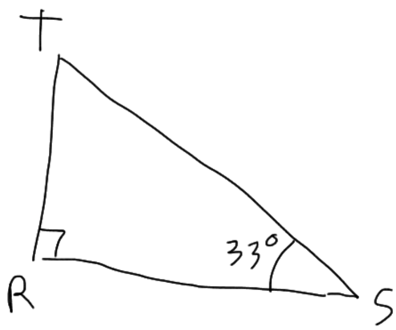
Si, dans un triangle rectangle, on connait la longueur d'un côté et la mesure d'un angle aigu, il est possible de calculer la longueur des autres côtés en utilisant un des rapports fournis par les tables de trigonométrie ou la calculatrice.

A propos de ce triangle, on peut imaginer 6 situations différentes :

- On connait SR et on cherche à calculer RT
- On connait RT et on cherche à calculer SR

- On connait ST et on cherche à calculer SR
- On connait SR et on cherche à calculer ST

- On connait ST et on cherche à calculer RT
- On connait RT et on cherche à calculer ST



Supposons que la table dressée par notre bonne âme nous dise que
$RT \approx 0{,}65 \times RS$, il ne sera pas difficile d'en déduire que $RS \approx \frac{RT}{0{,}65}$.

Il est donc inutile que notre bonne âme dresse une nouvelle table pour nous aider à calculer RS à partir de RT.
En revanche la table reliant RS et RT ne permet pas de résoudre les 4 autres situations.
Deux autres tables sont nécessaires.

Les trois tables ont reçu les noms suivants : sinus, cosinus, tangente
Pour les utiliser, il est nécessaire de mémoriser les définitions suivantes :

Sinus de l'angle de 17° = $\dfrac{\text{côté opposé à l'angle de 17°}}{\text{hypoténuse}}$ Sinus = $\dfrac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$

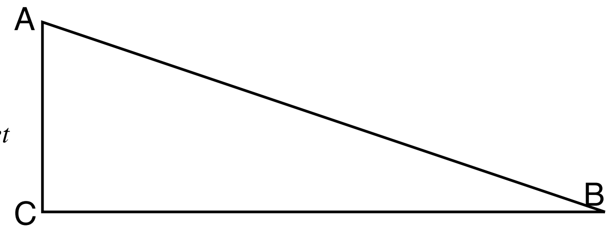
Cosinus de l'angle de 17°= $\dfrac{\text{côté adjacent à l'angle de 17°}}{\text{hypoténuse}}$ Cosinus = $\dfrac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$

Tangente de l'angle de 17°= $\dfrac{\text{côté opposé à l'angle de 17°}}{\text{côté adjacent à l'angle de 17°}}$ Tangente = $\dfrac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$

Rappel important :
Les rapports de trigonométrie ne peuvent s'utiliser **que dans les triangles rectangles**.
En effet, le raisonnement est basé sur le fait que deux triangles rectangles ayant un même angle aigu ont la même forme, l'un des deux est un agrandissement de l'autre. Ce n'est pas vrai si les deux triangles ne sont pas rectangles.

Exemples d'utilisation.

Le triangle ci-contre est rectangle en C.
On sait que AB = 12 cm et $\widehat{\mathrm{ABC}} = 19°$. Calculer AC.

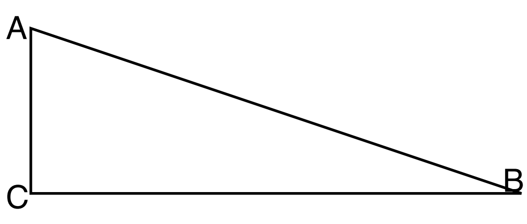


Phase de recherche *: on connait l'hypoténuse et on cherche le côté opposé à l'angle* $\widehat{\mathrm{ABC}}$*, on ne peut donc utiliser que le rapport utilisant côté opposé et hypoténuse, le sinus.*

Solution rédigée :
Le triangle ABC est rectangle en C, donc $\sin\widehat{\mathrm{ABC}} = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$.

On en déduit que $\mathrm{AC} = \mathrm{AB}\times\sin\widehat{\mathrm{ABC}} = 12\times\sin 19° \approx 3{,}9\,cm$.

Le triangle ci-contre est rectangle en C.
On sait que BC = 10 cm et $\widehat{\mathrm{ABC}} = 19°$. Calculer AB.



Phase de recherche *: on connait le côté adjacent à l'angle* $\widehat{\mathrm{ABC}}$ *et on cherche l'hypoténuse, on ne peut donc utiliser que le rapport utilisant côté adjacent et hypoténuse, le cosinus.*

Solution rédigée :
Le triangle ABC est rectangle en C, donc $\cos\widehat{\mathrm{ABC}} = \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$.

On en déduit que $AB = \dfrac{\mathrm{BC}}{\cos\widehat{\mathrm{ABC}}} = \dfrac{10}{\cos 19°} \approx 10{,}58\,cm$.