Vrai ou faux… justifier.

1) Une corde inextensible de 201 cm de long est fixée à ses extrémités sur un sol plat par deux clous distants exactement de 2 m. On soulève cette corde en son milieu le plus haut possible. On peut alors affirmer qu'on ne pourra pas dépasser 1 cm de hauteur.

2) La somme des carrés de deux nombres strictement positifs est toujours inférieure au carré de la somme de ces deux nombres.

3) Les nombres 231 567 808 771 et 3 457 799 045 311 n'ont pas de multiple commun.

4) La somme de 5 nombres consécutifs est toujours un multiple de 5.

5) Si on multiplie par 2 un nombre entier, son reste dans la division euclidienne par 11 est doublé.

6) Si les prix de deux objets augmentent chacun de 18%, la différence de prix entre ces deux objets augmente elle aussi de 18%.

7) Si un quadrilatère a deux angles droits et n'a pas de côtés parallèles, alors il a un cercle circonscrit.

8) Soient deux nombres positifs quelconques $A$ et $p$. On peut affirmer qu'il existe au moins un rectangle d'aire $A$ et de périmètre $p$.

9) Le même nombre donne l'aire latérale en $cm^2$ et le volume en $cm^3$ d'un cylindre de révolution dont le rayon mesure 2 cm.

10) Si deux arêtes d'un cube sont perpendiculaire à une même arête de ce cube, alors elles sont parallèles.

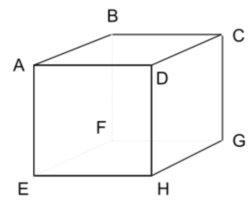
11) Un nombre pair peut être à la fois multiple de 3, de 5, de 7, de 11 et de 13

12) Un rectangle a quatre axes de symétrie.

13) Dans un triangle rectangle, le produit des côtés de l'angle droit est égal au produit de l'hypoténuse par la hauteur relative à l'hypoténuse.

14) Il existe un nombre entier unique qui a pour reste 1236 et pour quotient 2457 dans la division par 5689.

15) On note $x$ la mesure de l'arête de ce cube. La distance entre le milieu de [AD] et celui de [CG] est $\frac{\sqrt{6}}{2}x$




16) 3,2 $dm^3$ de liquide correspondent à 320 cl.

17) Si on double le rayon d'un cylindre de révolution sans modifier sa hauteur, l'aire latérale de ce cylindre est également doublée.

18) Si on roule pendant une heure à une vitesse v, puis pendant deux heures à la vitesse 4v, la vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet est 3v.

19) On fait un trajet aller-retour, l'aller à la vitesse v et le retour à la vitesse 3v. La vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet est alors égale à 2v.

20) Si on ajoute 1 au numérateur et au dénominateur d'une fraction, la valeur de la fraction augmente.

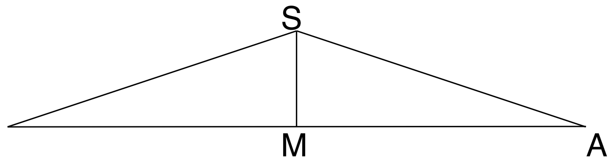
21) La somme de 5 multiples de 6 consécutifs est un multiple de 30.

22) La note moyenne des 600 candidats à un concours est 10 sur 20. Un candidat ayant 12 sur 20 est-il certain d'être dans les 300 premiers ?

*Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.*

**Réponses :**

1) Le schéma ci-contre représente la corde dans la position ou le milieu est soulevé le plus haut possible.

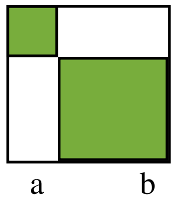



Le triangle SMA est alors un triangle rectangle en M tel que
SA = 101,5 cm et AM = 100 cm.
Le théorème de Pythagore permet alors d'affirmer que :
$101{,}5^2 = 100^2 + SM^2$, d'où on tire successivement :
$10100{,}25 = 10000 + SM^2$.
$SM^2 = 100{,}25$
$SM = \sqrt{100{,}25} > 10$

Le milieu de la corde peut être soulevé d'un peu plus de 10 cm, soit plus que 1 cm.
L'affirmation proposée est fausse.

2) Soient a et b deux nombres strictement positifs.
La somme de leurs carrés est $a^2 + b^2$.
Le carré de leur somme est $(a+b)^2$ qui est égal à $a^2+b^2+2ab$.
a et b étant strictement positifs, 2ab l'est également et la somme des carrés est donc inférieure au carré de la somme, l'affirmation est vraie.

*En interprétant a, b et a+b comme des mesures de longueur, et $a^2$ , $b^2$ et $(a+b)^2$ comme les aires de carrés ayant pour côtés a, b et a+b le schéma ci contre permet également d'établir l'égalité demandée.*




3) 231 567 808 771 x 3 457 799 045 311 est un multiple commun à 231 567 808 771 et 3 457 799 045 311 . L'affirmation est donc fausse.
*De façon générale deux entiers a et b ont toujours une infinité de multiples communs parmi lesquels 0 et ab.*
*Il se peut que le plus petit multiple commun non nul à 231 567 808 771 et 3 457 799 045 311 soit plus petit que leur produit et soint difficile à déterminer, mais la question ne demande pas de le déterminer.*

4) considérons 5 nombres entiers consécutifs, et appelons n celui du milieu.
La somme de ces 5 nombres s'écrit alors $(n-2) + (n-1) + n + (n+1) + (n+2) = 5n$
L'égalité ci-dessus montre que l'affirmation proposée est vraie.

5) Considérons un nombre entier n qui a pour reste 10 dans la division par 11.
Le nombre entier 2n ne saurait avoir pour reste 20 dans la division euclidienne par 11, le reste de la division euclidienne étant inférieur au diviseur.
La proposition est donc fausse. *( le reste dans la division par 11 de certains entiers double quand on double ces entiers, mais la formulation proposée signifie que le reste double pour tous les entiers, ce qui est faux).*

*On peut aussi s'appuyer sur un cas particulier (contre-exemple) ce qui suffit pour montrer qu'une affirmation générale est fausse. par exemple, le reste dans la division de 20 par 11 est 9, celui de la division de 40 par 11 est 7.*

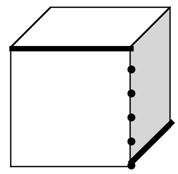
6) considérons deux objets dont les prix sont A et B, A étant le plus grand des deux.
après augmentation de 18%, les nouveaux prix sont 1,18A t 1,18B.
La différence est alors égale à 1,18A - 1,18B = 1,18 (A-B) ce qui est égal à l'ancienne différence augmentée de 18%.
L'affirmation est vraie.

7) Si un quadrilatère a deux angles droits et n'a pas de côtés parallèles, les sommets des angles droits sont alors opposés. Considérons un tel quadrilatère, ABCD dont A et C sont les sommets des angles droits.
ABD est un triangle rectangle en A donc A est sur le cercle de diamètre [BD].
CBD est un triangle rectangle en C donc C est sur le cercle de diamètre [BD].
Il en résulte que le cercle de diamètre [BD] passe par les points A,B,C et D, il est circonscrit à ABCD.
L'affirmation est vraie.

*Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.*

8) Considérons un rectangle de périmètre 10.
Sa longueur est inférieur à 10, sa largeur également, donc son aire est inférieure à 100.
Il n'existe donc pas de rectangle ayant pour périmètre 10 et pour aire 100.
L'affirmation est fausse.

9) Le volume du cylindre est donné par (aire de base x hauteur) soit $\pi \times 2^2 \times 2 = 8\pi$
La surface latérale peut être déroulée en un rectangle dont la longueur est le périmètre du cercle et dont la largeur est égale à la hauteur du cylindre. Son aire est donc $2 \times \pi \times 2 \times 2 = 8\pi$
L'affirmation proposée est vraie. *(Attention, dire que le volume du cylindre est égal à l'aire de la surface latérale n'aurait aucun sens, de même que 5 mètres n'est pas égal à 5 heures bien qu'on utilise le nombre 5 dans les deux cas).*



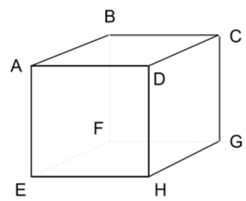
10) Le dessin ci-contre montre deux arêtes (en trait plein) perpendiculaires à la même arête en pointillé sans pour autant être parallèles entre elles.
La proposition est fausse.

11) $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$ est pair et multiple de 3, de 5, de 7, de 11 et de 13.
La proposition est vraie.
*Ici, on peut prouver la véracité de la proposition par un exemple parce qu'il ne s'agit pas de prouver que quelque chose est toujours vrai. Pour prouver qu'une chose est possible, il suffit d'en montrer un exemple.*
*On peut aussi considérer la négation de l'affirmation proposée, qui peut par exemple se formuler ainsi : si un nmbre entier est multiple de 5, 7 11 et 13 alors il est impair. cette affirmation est générale, le nombre $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$ est un contre-exemple qui prouve que cette affirmation générale est fausse…et conc que sa négation est vraie.*

12) Un rectangle n'a généralement que 2 axes de symétrie : la médiatrice commune aux deux longueurs et celle des deux largeurs. La proposition est fausse.
*Les diagonales du rectangle partagent le rectangle en deux triangles superposables mais ne sont pas pour autant des axes de symétrie sauf dans le cas des carrés qui sont les seuls rectangles avec quatre axes de symétrie.*

13) Si on considère deux façons de calculer l'aire du triangle rectangle : en utilisant les deux côtés de l'angle droit ou en prenant pour base l'hypoténuse, les produits proposés valent chacun le double de l'aire du triangle, ils sont donc égaux.
La proposition est vraie.

14) Par définition de la division eucilidienne, ce nombre est égal à $2457 \times 5689 + 1236$.
La proposition est vraie.




15) Soit M le milieu de [AD], P celui de [CG] en utilisant le théorème de Pythagore successivement dans les triangles MDP (rectangle en D) et DCP (rectangle en C), on obtient :
$MP^2 = MD^2+DP^2 = MD^2 + DC^2 + CP^2$

On a donc $MP^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4} + x^2 + \frac{x^2}{4} = \frac{6x^2}{4}$

d'où $MP = \sqrt{\frac{6}{4}}x = \frac{\sqrt{6}}{2}x$ L'affirmation est vraie.

16) Un décimètre-cube est égal à un litre et un litre à 100 centilitres, donc $3{,}2\ dm^3 = 3{,}2\ l = 320$ cl.
L'affirmation est vraie.

17) L'aire latérale du cylindre de rayon r et de hauteur h est égale à $2\pi r\ h$. elle double donc si le rayon est doublé.
L'affirmation est vraie.

18) Si on roule une heure à 30 km/h, puis deux heures à 120 km/h, on parcourt en tout 270 km en trois heures, à la vitesse moyenne de 90 km/h, qui est le triple de la vitesse initiale. Cet exemple semble confirmer la proposition, qu'il faut maintenant prouver dans un cas général.

Si v est le nombre qui mesure la vitesse en km/h, c'est églement le nombre de km parcourus en une heure. Dans les deux heures suivantes, on parcourt 4v km par heure.
On parcourt donc (v + 4v + 4v) km = 9v km en 3 heures, soit en moyenne 3v kilomètres en une heure. La vitesse moyenne est bien égale à 3v, l'affirmation est vraie.

19) Si on parcourt un trajet de 60 km à 20 km/h à l'aller puis à 60 km/h au retour, la durée totale du trajet est de 4heures (trois pour l'aller, une pour le retour) et la distance parcourue est 120 km.
La vitesse moyenne est alors de 30 km/h, qui n'est pas le double de 20 km/h.
L'affirmation est fausse.

20) Si on ajoute 1 au numérateur et au dénominateur de 5/5, on obtient 6/6 qui est égal à 5/5, la valeur de la fraction n'a pas augmenté.
L'affirmation est fausse. (elle est vraie pour les fractions inférieures à 1, c'est à dire dont le numérateur est plus petit que le dénominateur).

21) Considérons 5 multiples de 6 consécutifs, et notons 6n celui du milieu (n est entier puisque 6n est multiple de 6).
La somme de ces 5 nombres est S = (6n - 12) + (6n - 6) + 6n + (6n + 6) + (6n + 12) = 30n
L'affirmation est vraie.

22) Pour que la note moyenne des 600 candidats soit 10, il suffit que le total des points obtenu soit 6000, quelle que soit la répartition entre les candidats.
On peut par exemple avoir 300 candidats ayant obtenu 15 (total 4500 points) 125 candidats ayant obtenu 12 (1500 points) et les autres ayant 0.
Un candidat ayant 12 n'est alors pas dans les 300 premiers
La proposition est fausse.